Ecuaciones Diferenciales
Examen diciembre

16 de diciembre de 2011.

No. examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π tal que $f(x) = \begin{cases} x + 2\pi & \text{si } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$

   a) (15 puntos) Hallar el desarrollo en serie de Fourier de f.

   b) (10 puntos) Hallar y graficar la función F a la cual converge dicha serie.

   c) (5 puntos) Hallar
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

   Recordar: $\int x \operatorname{sen}(ax)\, dx = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$ y $\int x\cos(ax)\, dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \operatorname{sen}(ax)}{a}$

2. *a*) (20 puntos) Estudiar, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$, la estabilidad del $(0,0)$ en el sistema $\begin{cases} \dot{x} = -3x + \alpha y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$

   b) (15 puntos) Estudiar, enunciando el resultado que se use, la estabilidad del $(0,0)$ en el sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - \frac{3}{2}y + 3\operatorname{sen} x \\ \dot{y} = 2x + y + y^3 \end{cases}$$

3. *a*) (5 puntos) Hallar la función g, $g = g(y)$, que verifique $g'' + y^2 = 0$, tal que $g(0) = 1$ y $g(\pi) = 0$.

   b) (30 puntos) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < \pi\}$. Hallar u, $u = u(x,y)$, continua en $\bar{D}$ y de clase C^2 en D que verifique
$$u_{xx} + u_x = u_{yy} + y^2,$$
   tal que:
$$\begin{cases} u(x,0) = 1, \\ u(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = g(y) \\ u_x(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ny}{n^4} \end{cases}$$
   Sugerencia: hacer el cambio de variable $v(x,y) = u(x,y) - g(y)$.