Solución del examen de Ecuaciones Diferenciales

Julio 2010

1. (a) Como V es una función de clase $\mathcal{C}^1$ tenemos que la derivada de Lyapunov es, por la regla de la cadena

   $$\dot{V}(x) = < \nabla V(x), \dot{x} > = < \nabla V(x), -\nabla V(x) > = -\|\nabla V(x)\|^2 \leq 0 \, \forall X \in \Omega,$$

   ya que la norma de cualquier vector es siempre no negativa. Luego $\dot{V}(X_0) = 0 \Leftrightarrow -\|\nabla V(X_0)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla V(X_0) = 0$, nuevamente por propiedad de la norma. Por lo tanto, X_0 es un punto crítico de de V.

   (b) Ver teórico.

   (c) Como X_0 es un mínimo estricto de V y es punto interior de Ω y además V es diferenciable, tenemos que debe ser $\nabla V(X_0) = 0$ y por lo tanto X_0 es un punto de equilibrio del sistema. También podemos ver que es aislado, ya que ∇V no se anula en algún entorno del punto. Luego por la parte $a)$ tenemos que $\dot{V} < 0$ en dicho entorno. Por lo tanto por Lyapunov tenemos que X_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Recordar a que es equivalente en las hipótesis de Lyapunov que, V tenga un mínimo estricto en X_0 o que $V(X_0) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq X_0$, ya que si la función V tiene un mínimo en X_0, la función $\hat{V} = V(x) - V(X_0)$ cumple lo segundo.

   (d) Le buscaremos un potencial al campo de la ecuación de manera de poner la misma de la forma $\dot{x} = -\nabla V(x)$ y así aplicar las partes anteriores. Las funciones V en este caso son $V(x, y, z) = z^2 e^{xy} - cos(x^2 + y^2) + k$ en donde k es una constante cualquiera. Se puede ver que el origen es el único cero del campo y por lo tanto el único punto de equilibrio, ya que $z \equiv 0$ y luego $x \equiv y \equiv 0$. Lo que resta ver es que $(0, 0, 0)$ sea un mínimo de V. Eso se ve fácilmente considerando $k = 1$. Si $k = 1$ tenemos que $V(0, 0, 0) = 0$ y $\nabla V(0, 0, 0) = 0$, por lo tanto es candidato a extremo relativo, veremos que $V(x) > 0$ si $x \neq 0$ y así será un mínimo. $V(x, y, z) = z^2 e^{xy} - cos(x^2 + y^2) + 1 > z^2 e^{xy} > 0$ si $(x, y, z) \neq 0$, ya que $1 - cos(x^2 + y^2) > 0$. Así valen las partes anteriores y el origen es asintóticamente estable.

2. (a) Si $u(x, t) = F(x)G(t)$ es solución de la ecuación diferencial dada, se tiene que

   $$F(x)G'(t) = (-F'''' + (x)F''(x))G(t). \tag{1}$$

Si además imponemos la condición de que F sea de la forma $F(x) = \sin(\alpha x)$, la ecuación 1 queda

$$F(x)G'(t) = -(\alpha^4 + \alpha^2)F(x)G(t), \tag{2}$$

por lo que G debe ser $G(t) = ce^{-(\alpha^4+\alpha^2)t}$, con $c, \alpha \in \mathbb{R}$. Concluimos que cualquier función de la forma

$$u(x,t) = c\sin(\alpha x)e^{-(\alpha^4+\alpha^2)t} \tag{3}$$

es solución de la ecuación dada. Como la ecuación es lineal, una suma de funciones de esta forma también lo es.

Observemos además que cuando α es entero, la función dada por 3 también cumple la segunda condición dada: que $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

Consideremos la serie de Fourier de la extensión impar de f al intervalo $[-\pi, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \tag{4}$$

donde los b_k son los coeficientes de Fourier de f; es decir, $b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$.

Una solución formal del problema planteado es

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)e^{-(k^4+k^2)t}. \tag{5}$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)e^{-(k^4+k^2)t}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k||\sin(kx)e^{-(k^4+k^2)t}| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k|.$$

Como la última expresión es la suma parcial de una serie (numérica) convergente (puesto que f es C^1), el criterio de Weierstrass nos asegura que la serie de funciones 5 converge uniformemente.

Fijando $T_0 > 0$, observamos que $e^{-(k^4+k^2)t} < e^{-(k^4+k^2)T_0}$ si $t > T_0$. Para $t > T_0$ y $n \in \mathbb{N}$ derivamos la n-ésima suma parcial de la serie 5 i veces respecto de x y j veces respecto de t, obteniendo

$$\left|\frac{d^i}{dx^i}\frac{d^j}{dt^j}\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)e^{-(k^4+k^2)t}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k k^i (k^4+k^2)^j e^{-(k^4+k^2)T_0}.$$

Nuevamente la última expresión es la suma parcial de una serie (numérica) convergente, y el criterio de Weierstrass nos asegura que la derivada *formal* de la serie 5 es uniformemente convergente para $t > T_0$. Podemos concluir que el límite de la serie de las derivadas es la derivada del límite de la serie 5 (utilzando el teorema relativo a convergencia uniforme y derivación que aparece en el libro de Omar Gil como Teorema 2.5), y por lo tanto u tiene derivadas de todos los órdenes.

(c) La verificación se hace directamente usando la convergencia de las derivadas (para la ecuación diferencial), la convergencia puntual de 5 (para la condición de borde) y la convergencia de la serie de Fourier de f (para la condición inicial).