Examen de Ecuaciones Diferenciales.

16 de julio de 2010.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $V : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Se considera la ecuación:

$$\dot{X} = -\nabla V(X), \quad X \in \Omega.$$

Recordar que ∇V es el campo de vectores definido por las derivadas parciales de V.

a) Mostrar que $\dot{V} \leq 0$ para todo $X \in \Omega$. Probar que $\dot{V}(X_0) = 0$ si y solo si X_0 es un punto donde ∇V se anula.

b) Enunciar el teorema de Liapunov que asegura estabilidad asintótica de un punto de equilibrio en un sistema autónomo.

c) Si X_0 es un mínimo estricto de V y ∇V no se anula en puntos cercanos a X_0 distintos de él, entonces probar que X_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

d) Analizar la estabilidad en el origen del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -yz^2e^{xy} - 2xsen(x^2+y^2) \\ \dot{y} = -xz^2e^{xy} - 2ysen(x^2+y^2) \\ \dot{z} = -2ze^{xy} \end{cases}$$

2. *a*) Hallar una solución formal del problema:

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxxx} + u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

con f una función de clase C^1 en $[0,\pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$. Sug: Hacer separación de variables $u(x,t) = F(x)G(t)$ y buscar soluciones para F de la forma $F(x) = sen(\alpha x),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Probar que la función u hallada es C^∞ para todo $t > 0$.

c) Verificar que u es solución del problema original.