Examen de Ecuaciones Diferenciales.

28 de enero de 2010.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Sea (E) la ecuación diferencial
$$(E) \quad \dot{x} = \cos(x + t).$$
   a) Enunciar el teorema de salida de compactos. Demostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está en las hipótesis del teorema de Picard, toda solución maximal y acotada de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$.
   b) Hallar todas las soluciones lineales de la ecuación (E).
   c) Encontrar los puntos donde $\dot{x} = 0$ y los puntos donde $\ddot{x} = 0$.
   d) Bosquejar la solución de (E) que pasa por $(0, 0)$.
   e) Bosquejar todas las soluciones de la ecuación (E).
   f) Encontrar el intervalo maximal de definición de todas las soluciones de (E), justificando la respuesta.

2. a) Enunciar el teorema de estabilidad de Lyapunov de la solución estacionaria $X = 0$ de la ecuación
$$\dot{X} = f(X), \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
   donde f satisface las condiciones del teorema de Picard en un entorno W del origen $0 \in \mathbb{R}^3$ y $f(0) = 0$.
   b) Demostrar el teorema enunciado en la parte anterior.
   c) Se considera el siguiente sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = f(x, y, z) \end{cases}$$
   siendo f una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ de clase C^∞, que verifica $f(x, y, z) < 0$ si $z > 0$, $f(x, y, z) > 0$ si $z < 0$ y $f(0, 0, 0) = 0$. Estudiar estabilidad en el origen.
   Sug.: Considerar la función $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

3. Sea $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, L/2] \\ -2x + 2L & \text{si} \quad x \in (L/2, L] \end{cases}$$

   Hallar, utilizando el método de separación de variables, la solución formal de la ecuación
$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0 \qquad (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty)$$
   con las condiciones de contorno
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & x &\in [0, L] \\ u_t(x, 0) &= 0, & x &\in [0, L] \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & t &\in [0, +\infty) \end{aligned}$$