Solución del Examen de Ec.Dif., Dic. de 2010

Ej.1 Definimos matriz exponencial como:

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \frac{(tA)^i}{i!}\frac{(sA)^j}{j!} \\ &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \frac{(i+j)!}{i!j!} t^i s^j \frac{A^{i+j}}{(i+j)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} t^{n-k} s^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} (t+s)^n \\ &= e^{(t+s)A} \end{aligned}$$

Usamos el hecho de que, fijados s y t, la serie converge absolutamente respecto a la norma usual en las matrices (cualquier otra norma es equivalente) y por ende podemos reordenar los términos sin alterar el límite de la serie.

Una definición equivalente de matriz exponencial es como la solución (que existe y es única por Picard, con intervalo maximal la recta real por salida de compactos) al problema de Cauchy en el espacio de matrices:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= AM \\ M(0) &= I \end{aligned}$$

Definimos $e^A = M(1)$. Por regla de la cadena, $N(t) = M(st)$ es solución de

$$\begin{aligned} \dot{N} &= sAN \\ N(0) &= I \end{aligned}$$

siendo s un número real. Así, $e^{sA} = M(s)$ para todo s real. Debido a esto, $e^{(t+s)A}$ y $e^{tA}e^{sA}$ son ambas soluciones del problema

$$\begin{aligned} \dot{N} &= AN \\ N(0) &= e^{sA} \end{aligned}$$

y por unicidad son las mismas.

Respecto a la segunda afirmación, $e^{tA}e^{-tA} = e^{(t-t)A} = I$ por lo que $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

Para la parte b, vemos que la matriz tiene dos bloques. Es clara la exponencial del bloque de abajo. Para el bloque de arriba usamos el teorema: $AB = BA$ implica que $e^{A+B} = e^A e^B$. Es claro que el bloque de arriba es $\lambda I + N$ y que $N^2 = 0$. Así, la exponencial del bloque de arriba es

$$e^{t(\lambda I+N)} = e^{\lambda t I} e^{tN} = e^{\lambda t}(I + tN) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El enunciado de la parte c es falso, basta ver el caso $\lambda = 0$

Ej.2 Debido a que

$$| a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) | \leq | a_k || \cos(\frac{k\pi}{L}x) | + | b_k || \sin(\frac{k\pi}{L}x) | \leq | a_k | + | b_k |$$

y teniendo en cuenta la hipótesis, Weierstrass mediante, concluimos que la serie converge uniformemente. Debido a que la n-suma parcial es continua y 2L-periódica, el límite lo es también.

Considere el teorema: $f_n \rightrightarrows f$ y $f_n^{(l)} \rightrightarrows g$ implica que $f^{(l)}$ existe y que $f^{(l)} = g$. Procediando análogamente al párrafo anterior, concluimos la afirmación.

Debido a que f es impar, $a_n = 0$ tal que $n = 0, 1, \ldots$. Resta calcular b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx) = \frac{4}{\pi n^3}[1 - (-1)^n]$$

Observe que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n|b_n| \leq \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4\pi}{3}$$

en particular converge. Por la parte anterior, concluimos que la serie de Fourier converge uniformemente a una función de clase C^1.

Otra forma de concluir lo mismo es mediante el siguiente teorema (Corolario de Dini): Si f es una función periódica absolutamente integrable y derivable en x entonces la serie de Fourier de f evaluada en x converge a $f(x)$.
Dado que la extensión impar considerada f es derivable en toda la recta real, tenemos que la serie converge a f que es de clase C^1.

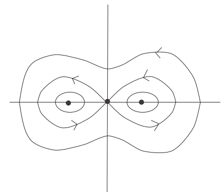
Ej.3 Los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $(\pm 1, 0)$. Sus respectivas linealizaciones son $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Sea φ solución del sistema no lineal.

$$\frac{d}{dt} H \circ \varphi = \dot{x}\partial_x H + \dot{y}\partial_y H = 0$$

por lo que H es constante en las órbitas, es decir, el recorrido de φ está contenido en una curva de nivel de H.

Figura 1:



Claramente, por el diagrama de fase, $(\pm 1, 0)$ son estables mientras que el origen es inestable. Otra forma de argumentar esto, sin ver el diagrama de fase, sería observar que el origen es inestable por Hartman-Grobman mientras que los otros dos puntos son los mínimos estrictos del Hamiltoniano H (En un sistema Hamiltoniano *conservativo clásico*, los máximos y mínimos estrictos del Hamiltoniano son puntos de equilibrio estable).

Debido a que toda curva de nivel de H está acotada y el recorrido de una solución está contenido en alguna de estas curvas, concluimos que toda solución está acotada. Por salida de compactos entonces, el intervalo maximal de toda solución es la recta real.