Examen de Ecuaciones Diferenciales.

20 de diciembre de 2010.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. (35 pts.)

   a) Definir matriz exponencial y probar las siguientes propiedades (A es una matriz cuadrada de entradas reales y s, t son reales):

   (i)
   $$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} = e^{As}e^{At},$$

   (ii)
   $$\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}.$$

   b) Hallar e^{At} para
   $$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
   discutiendo según $\lambda \in \mathbb{R}$ la estabilidad del origen. Bosquejar los posibles diagramas de fase.

   c) Estudiar si la siguiente afirmación es falsa o verdadera, justificando su respuesta: *si la matriz real de un sistema lineal es tal que todos sus valores propios tienen parte real menor o igual a cero entonces se verifica que el origen es un punto de equilibrio estable.*

2. (35 pts.)

   a) Consideremos dos sucesiones de números reales $\alpha_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ y $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots$ tales que
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k| + |\beta_k| < \infty.$$

   (i) Mostrar que la serie
   $$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$
   converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función $g(x)$, continua y periódica con período $2L$.

   (ii) Supongamos que los coeficientes $\alpha_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ y $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots$ satisfacen la condición más fuerte
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} k^l|\alpha_k| + k^l|\beta_k| < \infty,$$
   donde $l \geq 1$ es un número natural. Mostrar que el límite g de la serie de la primera parte es una función de clase C^l en $\mathbb{R}$.

   b) Sea la función $g(x) = x(\pi - x),$ con $x \in [0, \pi]$. Llamemos f a la extensión impar y 2π periódica de g.

   (i) Hallar la serie de fourier asociada a f.

   (ii) Probar que dicha serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y que el límite uniforme es una función de clase $\mathcal{C}^1$.

3. (30 pts.) Se considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = x^3 - x \end{cases}$$

a) Hallar los puntos de equilibrio y estudiar completamente las linealizaciones en cada uno de ellos, bosquejando sus respectivos diagramas de fase.

b) Sea $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $H(x, y) = y^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

   (i) Probar que H es constante sobre las órbitas del sistema. Bosquejar las curvas de nivel de H. Sug: Puede ser útil estudiar la familia de funciones $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_\lambda(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \lambda$, discutiendo según $\lambda \in \mathbb{R}$ la solución de $f_\lambda(x) \geq 0$.

   (ii) Bosquejar el diagrama de fase del sistema.

c) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema original y compararlo con sus linealizaciones.

d) Estudiar los intervalos maximales de las soluciones del sistema original.