# Examen Ecuaciones Diferenciales.

29 de enero de 2009.

| No. Examen | Apellido y nombre | Firma | Cédula |
|---|---|---|---|
| | | | |

(1) (40 puntos)

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(cx - d) \end{cases} \quad \text{con} \quad a, b, c \text{ y } d \text{ positivos}$$

(a) Hallar los puntos de equilibrio. (5 puntos)

(b) Probar que $V(x, y) = -a \log y - d \log x + by + cx$ cumple que tiene un mínimo en el punto de equilibrio que no es el origen y que $\dot{V} = 0$. (10 puntos)

(c) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio. (10 puntos)

(d) Hallar las soluciones $\varphi$ y $\psi$ tales que $\varphi(0) = (x_0, 0)$ y $\psi(0) = (0, y_0)$ con $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. (10 puntos)

(e) Sea $A = \{(x, y) \in R^2 : \ x > 0, y > 0\}$. Probar que si $\varphi$ es una solución con $\varphi(t_0) \in A$ entonces $\varphi(t) \in A$ para todo $t$ perteneciente al intervalo maximal.(5 puntos)

(2) (40 puntos) Se considera la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = -(y^2 - 1)e^{y^2} \end{cases}$$

(a) Hallar y clasificar los puntos de equilibrio. (10 puntos)

(b) Demostrar que si $\varphi$ es una solución maximal de la ecuación diferencial con condición inicial $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ tal que $|x_0| < 1$ e $|y_0| < 1$ entonces su intervalo maximal es $R$. (15 puntos)

(c) Demostrar que si $\varphi$ es una solución maximal de la ecuación diferencial con condición inicial $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ tal que $x_0 > 1$ entonces su intervalo maximal no es $R$. (15 puntos)

(3) (30 puntos) Sea la ecuación

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi). \\ u(x, 0) = 0 & \forall x \in (0, \pi). \\ u(x, \pi) = 0 & \forall x \in (0, \pi). \\ u_x(0, y) = 0 & \forall y \in (0, \pi). \\ u_x(\pi, y) = f(y) & \forall y \in (0, \pi). \end{cases}$$

Siendo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(y) = \begin{cases} y & si \quad y \in [0, \pi/2] \\ \pi - y & si \quad y \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Hallar la solución.

**El puntaje mínimo de aprobación es 60 puntos.**