Solución del examen de Ecuaciones Diferenciales, diciembre 2009.

1. *a*) Es suficiente calcular el límite de g cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, verificar que es $(0, 0)$.

   b) Como el campo es de clase C^1 en la región $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tenemos que ahi también es localmente lipschits y por supuesto continua. En $(0, 0)$ el campo no es localmente lipschitz.

   c) Pasando a coordenadas polares obtenemos $\dot{r} = r \sin(1/r2)$ y $\dot{\theta} = 1$. Como las órbitas que buscamos tienen radio constante igualamos $\dot{r}$ a cero. Obteniendo $r_k = 1/\sqrt{k\pi}$ con $k = 1, 2, 3, \ldots$. Por lo tanto las circunferencias centradas en el origen y de radio r_k son órbitas periódicas.

   d) Es claro que estas órbitas periódicas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Si tomamos una condición entre dos órbitas peri ódicas cualesquiera, si consideramos el anillo compacto que estas determinan, concluimos que la órbita está acotada (por la unicidad de las soluciones), por lo tanto aplicamos escape de compactos y concluimos que estas soluciones están definidas en $\mathbb{R}$. Luego resta considerar una condición inicial fuera del círculo de radio r_1 (el más grande). En esta región $\dot{r}$ es positivo y tiende a cero cuando r tiende a r_1 y a $+\infty$. Por lo tanto tiene un máximo con lo cual la derivada de r está acotada. Esto implica que $r(t)$ con estas condiciones iniciales, esta definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Observar que $\theta(t) = \theta_0 + t$ con lo cual también está definida para todo t en $\mathbb{R}$.

   e) El origen es estable: dado $\varepsilon > 0$ considero k suficientemente grande de forma tal que $\delta = r_k$ sea menor que ε; de esta forma si $||(x_0, y_0)|| < \delta$ por la unicidad de las soluciones tenemos que la solución por (x_0, y_0) no puede salir de $B_\delta((0, 0)) \subset B_\varepsilon((0, 0))$. El origen no es asintóticamente estable: esto es porque las soluciones periódicas encontradas acumulan en el origen y no convergen a dicho punto.

2. *a*) Sea

$$f_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)$$

   Entonces

$$|f_n(x)| = |a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)| \leq$$

$$|a_0/2| + \sum_{k=1}^{n} |a_k(f) \cos(kx)| + |b_k(f) \sin(kx)| \leq |a_0/2| + \sum_{k=1}^{n} |a_k(f)| + |b_k(f)|$$

   Como esta última serie no depende de x y es convergente por hipótesis, tenemos garantizada la convergencia uniforme por el criterio de Weierstrass. El hecho de que g sea continua y 2π-periódica se debe a que cada f_n lo es y la convergencia es uniforme.

   b) Calculemos $a_k(g)$ $(k \geq 1)$, se procede de forma análoga para a_0 y b_k.

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \cos(kx) dx$$

Como f_n converge uniformemente a g y las funciones f_n son continuas, podemos intercambiar el límite con la integras. Obteniendo asi

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\cos(kx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0/2 + \sum_{l=1}^{n} a_l(f)\cos(lx) + b_l(f)\sin(lx) \right] \cos(kx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_k(f)\cos(kx)\cos(kx)dx$$

$$= \frac{a_k(f)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(kx)dx = \frac{a_k(f)}{\pi}\pi = a_k(f)$$

c) De la parte anterior concluimos que $a_k(f-g) = b_k(f-g) = 0$. Por Parseval tenemos que

$$||f-g||^2 = ||a_0(f-g)||^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ||a_k(f-g)\cos(kx)||^2 + ||b_k(f-g)\sin(kx)||^2 = 0$$

Luego $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx = 0$ y como el integrando es no negativo y continuo tenemos que es nulo en el intervalo de integración. A su vez como ambas funciones, f y g, son periódicas tenemos que coinciden en todo $\mathbb{R}$.