Examen de Ecuaciones Diferenciales.

22 de diciembre de 2009.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Consideremos la ecuación diferencial

$$(E)\quad \begin{cases} \dot{x} &= -y + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) x \\ \dot{y} &= x + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) y \end{cases}$$

   a) Demostrar que $g(x,y) = \left(-y + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) x, x + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) y\right)$ se extiende en forma continua a $(0,0)$, y concluir que (E) admite una extensión a todo $\mathbb{R}^2$ para la cual $(0,0)$ es un punto de equilibrio.

   b) Probar que (E) está en las hipótesis del teorema de Picard, para cualquier condición incial en $\mathbb{R}^2$.

   c) Probar que hay una familia infinita de circunferencias centradas en $(0,0)$ que son soluciones periódicas (es decir, órbitas periódicas) de (E), y hallarla.

   d) Probar que todas las soluciones de la ecuación (E) están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

   e) Estudiar la estabilidad de $(0,0)$. ¿Es estable? ¿Es asintóticamente estable?

   f) Dibujar el diagrama de fase de la ecuación (E).

2. Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica.

   a) Probar que si f es continua y

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) < \infty,$$

   entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica y continua.

   b) Probar que $a_0(f) = a_0(g)$ y que $\forall k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k(f) &= a_k(g), \\ b_k(f) &= b_k(g). \end{aligned}$$

   c) Probar usando el teorema de Parseval que $||f - g||_2 = 0$ y deducir que $f = g$. Concluir que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$. (Se recuerda que $||h||_2 = (\int_{-\pi}^{\pi} h^2)^{\frac{1}{2}}$.)

d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función 2π-periódica determinada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{si} \quad x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Hallar la serie de Fourier de f y probar que ésta no converge uniformemente a f.

e) Sean $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = 1 - x$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su extensión par y 2-periódica. Usando la serie de Fourier de f, probar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$