Ecuaciones Diferenciales.
Curso 2007

Exámen Julio-2008.

1. (40 puntos)
   (a) (10 puntos) Enunciar (NO demostrar) el teorema de Picard.
   (b) (10 puntos) Definir solución maximal y demostrar que si $\dot{x} = f(x,t)$ satisface las hipótesis de Picard en Ω entonces para cada punto $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe y es única la solución maximal.
   (c) (20 puntos) Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$, con $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ y la solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) = x_0$. Probar que su intervalo maximal es $\mathbf{R}$.
2. (20 puntos) Se considera $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Sea la ecuación

$$\dot{x} = \tfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)$$

$$\dot{y} = -\tfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)$$

   (a) (5 puntos) Probar que H es una preintegral.
   (b) (15 puntos) Sea la ecuación

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -sin(x)$$

   Bosquejar las soluciones de la ecuación diferencial en el diagrama de fase, justificando las ideas que se usen.
3. (40 puntos) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones ($f_n : R \to R$) tal que

$$f_n^{''}(x) = f_{n+2}(x)(n+2)(n+1) - f_n(x) \quad \forall x \in R \ \ \forall n \in N$$

$$\text{con } f_0(x) = e^x \text{ y } f_1(x) = 0$$

   (a) (10 puntos) Probar que $f_{2n+1}(x) = 0$,$\forall x \in R$, $\forall n \in N$ y que $f_{2n}(x) = 2^n e^x/(2n)!$ $\forall x \in R$, $\forall n \in N$.
   (b) Se considera la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t) \text{ con } -L < x < L \text{ y } 0 < t < 1$$

   i)(15 puntos) Buscar soluciones de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) t^n$$

   , dando una expresión explícita para $f_n(x)$.
   ii)(15 puntos) Probar que la función $u(x,t)$ hallada en i) es efectivamente solución.