Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Ecuaciones Diferenciales.
Curso 2008

Solución del examen de diciembre de 2008.

**Ejercicio 1.**
Parte a) ver teórico.
**Parte b) i).**
Si consideramos $V(x,y) = x^2 + y^2$, se tiene que $\dot{V} = 2x(y + \lambda f(x)) + 2y(-x - y) = 2x\lambda f(x) - 2y^2$. De donde utilizando las propiedades de $f$ y que $\lambda < 0$ se llega a que $\dot{V} < 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y por el teorema de Lyapunov se llega a que el origen es asintóticamente estable.

**Parte b) ii).**
Para $\lambda = 0$ se tiene que el sistema es

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Si calculamos las raíces del polinomio característico no da que ambas raíces tiene parte real negativa, así que el origen es asintóticamente estable.

**Ejercicio 2.**
Primero observar que la ecuación satisface la hipótesis del teorema de Picard.
Si la solución de $\dot{x} = cos(x)$ tal que $x(t_0) = x_0$ tiene intervalo maximal $R$ y la de $\dot{y} = sen(y)$, con $y(t_0) = y_0$ también tiene intervalo maxima $R$, entonces la solución $\varphi$ de la ecuación tal que $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ también tiene intervalo maximal $R$ y aplicando Picard se deduce que $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.
**Parte a).**
$cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$ con $k \in Z$.
$sen(y) = 0 \Leftrightarrow y = +k^{'}\pi$ con $k^{'} \in Z$.
Entonces el conjunto de puntos de equilibrio es

$$\{(x,y): \ x = \pi/2 + k\pi \ , \ y = k^{'}\pi \ \ con \ k \in Z, \ k^{'} \in Z\}$$

**Parte b).** Aplicando el teorema de Hartman llegamos a que

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -sen(x) & 0 \\ 0 & cos(y) \end{pmatrix} \qquad J_{(\pi/2+k\pi, k^{'}\pi)} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ -0 & (-1)^{k^{'}} \end{pmatrix}$$

De donde se deduce lo siguiente:
-Si $k = \dot{2}$ y $k^{'} = \dot{2}$ el punto es inestable.
-Si $k = \dot{2}$ y $k^{'} \neq \dot{2}$ el punto es asintóticamente estable.
-Si $k \neq \dot{2}$ y $k^{'} = \dot{2}$ el punto es inestable.
-Si $k \neq \dot{2}$ y $k^{'} \neq \dot{2}$ el punto es inestable.

**Parte c) i).**
Sea $\varphi$ tal que $\varphi(t_0) \in r_k$ entonces si $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$, existe $k_0$ tal que $x_0 = \pi/2 + k_0\pi$ como $cos(x_0) = 0$ entonces $x(t) = x_0$ es la solución de $\dot{x} = cos(x)$ con intervalo maximal $R$. Sea $y(t)$ la solución de $\dot{y} = sen(y)$ con $y(t_0) = y_0$. Utilizando Picard sabemos que existe y es única $y(t)$, además razonando igual que en el ejercicio 5 del práctico 6 se llega a que el intervalo maximal es $R$, por lo tanto se tiene que $\varphi(t) = (x_0, y(t)) \in r_k$, $\forall t \in I$. Si

$\varphi(t_0) \in s_k^{'}$ es análogo.
**Parte c) ii).**
Sea la solución maximal $\varphi$ tal que $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$.
Si $\varphi(t_0) \in r_k$ o Si $\varphi(t_0) \in s_k^{'}$, por la parte anterior sabemos que el intervalo maximal es $R$.
Si $\varphi(t_0) \notin r_k$ o Si $\varphi(t_0) \notin s_k^{'}$, entonces existen $k_0$ y $k_0^{'}$ tales que

$$\pi/2 + k_0\pi < x_0 < \pi/2 + (k_0+1)\pi \quad \text{y} \quad k^{'}\pi < y_0 < (k^{'}+1)\pi$$

De lo demostrado en la parte i) se tiene que si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ entonces

$$\begin{array}{ll} \pi/2 + k_0\pi < x(t) < \pi/2 + (k_0+1)\pi, & \forall t \in I (I = \text{intervalo maximal}) \\ k^{'}\pi < y(t) < (k^{'}+1)\pi, & \forall t \in I \end{array}$$

( De lo contrario se cortarían dos soluciones)
Luego existe $\alpha > 0$ tal que $x^2(t) + y^2(t) < \alpha$, $\forall t \in I$. Supongamos que existan $a, b \in R$ tal que $I = (a, b)$. Consideremos el compacto $K = \overline{B(0,\alpha)} \times [t_0, b]$. Entonces $\forall t > t_0$, $t \in I$ se tiene que $(t, \varphi(t)) \in K$, lo que contradice el teorema de salida de compactos. Entonces $b = +\infty$. Análogamente se demuestra que $a = -\infty$

**Ejercicio 3.**
Busquemos soluciones de la forma $u_k = X_k(x).Y_k(y)$. Si imponemos la primer condición $(u_{xx} + u_{yy} = 0)$ llegamos a que
$X_k^{''}(x).Y_k(y) + X_k(x).Y_k^{''}(y) = 0$, de donde

$$\frac{X_k^{''}}{X_k} = -\frac{Y_k^{''}}{Y_k} = \lambda = cte$$

Si imponemos la segunda $(u(x,0) = 0)$ y la tercer condición $(u(x,\pi) = 0)$llegamos a que
$Y_k^{''} + \lambda Y_k = 0$ con $Y_k(0) = Y_k(\pi) = 0$. Entonces

$$Y_k(y) = b_k sen(ky) \ \text{ con } \lambda = k^2.$$

Por lo tanto la otra ecuación es $X_k^{''} - k^2 X_k = 0$, de donde

$$X_k(x) = C_k e^{-kx} + D_k e^{kx}$$

Si imponemos la cuarta condición $(u_x(0,y) = 0)$ tenemos que $X_k^{'}(0) = 0$ y llegamos a que

$$X_k(x) = C_k(e^{-kx} + e^{kx})$$

Por lo tanto el candidato a solución es

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(e^{-kx} + e^{kx}) sen(ky) \quad k \in N$$

Imponiendo la última condición $u_x(\pi, y) = 1$, llegamos a que

$$u_x(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k k(-e^{-kx} + e^{kx}) sen(ky) = 1$$

de donde

$$u_x(\pi,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k k(-e^{-k\pi} + e^{k\pi}) sen(ky) = 1$$

De donde deducimos que $A_k k(-e^{-k\pi} + e^{k\pi})$ es el coeficiente de Fourier de la función constante 1, extendida de forma impar al intervalo $[-\pi, \pi]$. El coeficiente

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = 2 \left( \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right)$$

de donde se deduce que $A_{2k} = 0$ y

$$A_{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)^2 \pi \operatorname{senh}((2k+1)\pi)}$$