Examen Ecuaciones Diferenciales.

23 de diciembre de 2008.

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

(1) (40 puntos)

(a) Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 tal que $F(0) = 0$. Se considera la ecuación diferencial

$$\dot{X} = F(X)$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un entorno del origen y una función $V : U \to \mathbb{R}$, C^1 tal que:

i) $V(X) > V(0) = 0$, $\forall X \in U \setminus \{0\}$.
ii) $\dot{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle \leq 0$.
Probar que 0 es un punto de equilibrio estable. (20 puntos)

(b) Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \lambda f(x) \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Donde $f : R \to R$ es una función de clase C^1 con $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) > 0$ si $x > 0$ y $f(0) = 0$.

(i) Demostrar que si $\lambda < 0$ el origen es asintóticamente estable.(10 puntos)
(ii) Para $\lambda = 0$ hacer el diagrama de fase y estudiar la estabilidad del origen. (10 puntos)

(2) (30 puntos) Se considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = cos(x) \\ \dot{y} = sen(y) \end{cases}$$

(a) Hallar los puntos de equilibrio.(5 puntos)
(b) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.(5 puntos).
(c) Sean las familias de rectas

$$r_k = \{(x, y) : \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ con } k \in Z\} \quad \text{y} \quad s_{k'} = \{(x, y) : \quad y = k^{'}\pi, \text{ con } k^{'} \in Z\}.$$

(i) Probar que si φ es una solución tal que $\varphi(t_0) \in r_k(s_{k'})$ entonces $\varphi(t) \in r_k(s_{k'})$, para todo t perteneciente al intervalo maximal de dicha solución.(10 puntos)
(ii) Probar que el intervalo maximal de cualquier solución es R.(10 puntos)

(3) (30 puntos) Sea la ecuación

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi). \\ u(x, 0) = 0 & \forall x \in (0, \pi). \\ u(x, \pi) = 0 & \forall x \in (0, \pi). \\ u_x(0, y) = 0 & \forall y \in (0, \pi). \\ u_x(\pi, y) = 1 & \forall y \in (0, \pi). \end{cases}$$

Hallar la solución.

El puntaje mínimo de aprobación es 60 puntos.