

Exámen diciembre-2007

1. Sea el sistema

$$(I) \begin{cases} \dot{x} = -8x - y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

- (a) Hallar sus puntos de equilibrio.
 - (b) Para cada uno de los puntos de equilibrio \bar{x} de (I), resolver completamente el sistema $\dot{X} = D_{\bar{x}}f.X$ y dibujar el diagrama de fase.
 - (c) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de (I).
2. (a) Enunciar (**NO DEMOSTRAR**) el teorema de salida de compactos.
- (b) Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = \operatorname{sen}(2\pi x)$.
- i. Hallar los puntos de equilibrio.
 - ii. Probar que el intervalo maximal de toda solución es \mathbf{R} .
3. Hallar la solución, $u(x, t)$, de la ecuación $u_t = u_{xx}$ en $(0, 1) \times (0, \infty)$ con condiciones de borde

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1$$

y dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(a) Si $u(x, t)$ es solución del problema entonces

$$u(x, t) = \dots\dots\dots$$

(b) Probar que lo hallado en (a) satisface la ecuación $u_t = u_{xx}$ con $(x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$.