

Comunicaciones Inalámbricas  
Notas del Curso  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de la República

Pablo Belzarena y Federico Larroca

13 de octubre de 2017



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Ecuación</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1. Introducción . . . . .  | 5         |
| 1.2. Filtro de recepción . . . . .   | 8         |
| 1.2.1. Canal ideal con ruido . . . . .   | 8         |
| 1.2.2. Canal no ideal . . . . .  | 10        |
| 1.3. Estimación óptima de secuencias de símbolos . . . . .                       | 12        |
| 1.3.1. Probabilidades de error y estimadores MAP o ML . . . . .                  | 13        |
| 1.3.2. ML en el caso de ruido gaussiano blanco . . . . .                         | 13        |
| 1.3.3. El algoritmo de Viterbi y el diagrama de Trellis . . . . .                | 14        |
| 1.4. Ecuación Lineal . . . . .   | 18        |
| 1.4.1. $SNR = \infty$ , criterio de distorsión de pico, ecualizador ZF . . . . . | 20        |
| 1.4.2. SNR finito, Ecualizador error cuadrático medio, MSE . . . . .             | 24        |
| 1.5. Ecuación de espaciado fraccional . . . . .                                  | 27        |
| 1.5.1. Introducción . . . . .  | 27        |
| 1.6. Ecualizadores adaptivos . . . . .   | 29        |
| 1.6.1. Algoritmo adaptivo LMS . . . . .  | 30        |
| 1.6.2. Ecuación a ciegas: Algoritmo CMA . . . . .                                | 31        |
| <b>A. Material complementario</b>  | <b>35</b> |
| A.1. Prueba de Teoremas . . . . .  | 35        |
| A.1.1. Teorema 1.2. . . . .  | 35        |
| A.2. Ecualizadores fraccionales y Teorema de Euclides . . . . .                  | 36        |
| A.2.1. El Teorema de Euclides . . . . .  | 36        |
| A.2.2. Diseño de ecualizadores FSE con filtros FIR . . . . .                     | 39        |



# Capítulo 1

## Ecualización

### 1.1. Introducción

Cuando se estudiaron los problemas de sincronización, se asumió que el canal podía ser modelado como un filtro con la siguiente respuesta al impulso  $h(t)$  mas un ruido blanco gaussiano.

$$h(t) = h_0\delta(t - \tau) \quad (1.1)$$

donde  $h_0$  es una constante y  $\tau$  el retardo introducido por el canal.

En este capítulo se trabajará con un modelo del canal menos ideal y se analizará el impacto que tiene sobre la señal recibida y cómo debe diseñarse un receptor para solucionar los problemas que trae aparejados.

Se comenzará estudiando el problema en tiempo continuo para luego llegar al modelo discreto con el que se trabajará en el resto del capítulo. Como se ha visto en capítulos anteriores la señal banda base transmitida es

$$s(t) = \sum_k a[k]p_{tx}(t - kT_s) \quad (1.2)$$

siendo  $a[k]$  los símbolos complejos,  $p_{tx}(t)$  el pulso conformador de transmisión y  $T_s$  el tiempo entre símbolos. En este capítulo se notará a los pulsos de transmisión y recepción  $p_{tx}$  y  $p_{rx}$  y no  $p$  como en otros capítulos porque uno de los objetivos es estudiar cómo deberían ser estos pulsos cuando el canal no es ideal.

La señal bandabase es luego convertida en una señal pasa banda (BP)

$$\begin{aligned} s_{BP}(t) &= \operatorname{Re} \left[ s(t)e^{j(2\pi f_c t + \theta(t))} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ s_{LP}(t)e^{j2\pi f_c t} \right] \\ s_{LP}(t) &= s(t)e^{j\theta(t)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

siendo  $f_c$  la frecuencia portadora y  $\theta(t)$  el jitter o las variaciones del oscilador del transmisor entorno a la frecuencia portadora. A  $s_{LP}$  se lo denomina equivalente pasa bajo (LP) de  $s_{BP}$

En el receptor en pasa banda se tendrá:

$$r_{BP}(t) = h_{BP}(t - \tau) * s_{BP} + w_{BP}(t) \quad (1.4)$$

donde  $h_{BP}(t)$  es la respuesta al impulso del canal (que asumimos invariante en el tiempo) y  $\tau$  como ya se mencionó es el retardo introducido por el canal. Se denomina  $w_{BP}(t)$  al ruido introducido por el canal. La hipótesis de que la respuesta al impulso del canal es invariante en el tiempo se mantendrá en casi todo este capítulo salvo sobre el final del mismo cuando se vean algoritmos de ecualización adaptivos.

En el receptor esta señal es bajada en frecuencia y filtrada obteniéndose:

$$x(t) = A p_{rx}(t) * \left( r_{BP} e^{-j(2\pi\hat{f}_c t + \hat{\theta}(t))} \right) \quad (1.5)$$

siendo  $A$ , la ganancia del control automático de ganancia,  $p_{rx}(t)$  el filtro de recepción,  $\hat{f}_c$  y  $\hat{\theta}$  son las frecuencia portadora y el jitter del oscilador local de recepción.

Se asumirá en este capítulo que  $\hat{f}_c$  aproxima bien a  $f_c$ , que  $\theta(t)$  y  $\hat{\theta}(t)$  varían lentamente en el tiempo y que el filtro de recepción es un filtro pasabajo.

Se definen las siguientes señales equivalentes pasabajo:

$$\begin{aligned} r_{BP}(t) &= Re [r_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t}] \\ w_{BP}(t) &= Re [w_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t}] \\ h_{BP}(t) &= 2Re [h_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t}] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sustituyendo en la ecuación 1.4, las definiciones 1.6 y 1.3 se llega a:

$$Re [r_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t}] = 2Re [h_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t}] * Re [s_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t}] + Re [w_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

Tomando transformada de Fourier de esta ecuación:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (R_{LP}(f - f_c) + R_{LP}^*(-f - f_c)) = \\ &(H_{LP}(f - f_c) + H_{LP}^*(-f - f_c)) \frac{1}{2} (S_{LP}(f - f_c) + S_{LP}^*(-f - f_c)) + \frac{1}{2} (W_{LP}(f - f_c) + W_{LP}^*(-f - f_c)) \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que estas señales son pasabajos y por lo tanto los términos en  $(f - f_c)$  y  $(-f - f_c)$  tienen producto cero se puede observar que:

$$R_{LP}(f) * \delta_{f_c} = (H_{LP}(f) S_{LP}(f)) * \delta_{f_c} + W_{LP}(f) * \delta_{f_c}$$

y por lo tanto,

$$r_{LP}(t) = h_{LP}(t - \tau) * s_{LP}(t) + w_{LP}(t)$$

teniendo en cuenta la definición de  $s_{LP}$  y la hipótesis de que  $\theta(t)$  varía lentamente, la expresión anterior se puede aproximar por:

$$r_{LP}(t) = e^{j\theta(t)} [h_{LP}(t - \tau) * s(t)] + w_{LP}(t) \quad (1.7)$$

Por otra parte de 1.6 y 1.5 se llega a que:

$$x(t) = \frac{A}{2} p_{rx}(t) * \left( r_{LP} e^{-j(2\pi(\hat{f}_c - f_c)t + \hat{\theta}(t))} + r_{LP}^* e^{-j(2\pi(\hat{f}_c + f_c)t + \hat{\theta}(t))} \right) \quad (1.8)$$

de donde teniendo en cuenta la hipótesis de que el filtro de recepción es un pasabajo se llega a la siguiente aproximación:

$$x(t) \approx \frac{A}{2} p_{rx}(t) * \left( r_{LP} e^{-j(2\pi(\hat{f}_c - f_c)t + \hat{\theta}(t))} \right) \quad (1.9)$$

Sustituyendo 1.7 en 1.9:

$$x(t) \approx \frac{A}{2} e^{-j\Delta\theta(t)} (p_{rx}(t) * h_{LP}(t - \tau) * s(t)) + w(t) \quad (1.10)$$

$$\Delta\theta(t) = 2\pi(\hat{f}_c - f_c)t + \hat{\theta}(t) - \theta(t) \quad (1.11)$$

$$w(t) = \frac{A}{2} e^{-j(2\pi(\hat{f}_c - f_c)t + \hat{\theta}(t))} [p_{rx}(t) * w_{LP}(t)] \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

de esta ecuación se llega a:

$$x(t) \approx e^{-j\Delta\theta(t)} \sum_k a[k] h(t - kT_s - \tau) + w(t) \quad (1.14)$$

$$h(t) = \frac{A}{2} p_{rx}(t) * h_{LP}(t) * p_{tx}(t) \quad (1.15)$$

Esta señal como se vio en el capítulo de sincronización temporal es luego muestreada a  $nT_s + \hat{\tau}$  donde  $\hat{\tau}$  es una estimación del retardo realizada por el mecanismo de sincronización temporal. Se considerará en primera instancia que se trabaja a una muestra por símbolo y posteriormente se analizará el caso de equalización con varias muestras por símbolo.

Luego de este muestreo se obtiene:

$$x[n] = x(nT_s + \hat{\tau}) \approx e^{-j\Delta\theta_n} \sum_k a[k] h((n - k)T_s + \hat{\tau}) + w[n] \quad (1.16)$$

$$= e^{-j\Delta\theta_n} (h[n] * a[n]) + w[n] \quad (1.17)$$

$$\Delta\theta_n = \Delta\theta(nT_s + \hat{\tau}) \quad (1.18)$$

$$w[n] = w(nT_s + \hat{\tau}) \quad (1.19)$$

$$h[n] = h(nT_s + \hat{\tau} - \tau) \quad (1.20)$$

De esta ecuación vemos que el problema de recuperar los símbolos que fueron enviados implica eliminar la interferencia entre símbolos que genera el filtro equivalente  $h[n]$ . Se debe observar que esta interferencia se puede deber al filtro de transmisión, de recepción, al canal y también al estimador del retardo  $\hat{\tau}$ .

Se ha visto en capítulos anteriores que si el canal es ideal y los filtros de transmisión y recepción cumplen el criterio de Nyquist se puede evitar o mitigar la interferencia entre símbolos con un sincronizador preciso.

Sin embargo, el canal y la estimación del retardo hacen que el filtro equivalente no necesariamente cumpla esta propiedad. A continuación se analizará el filtro de recepción para el caso de un canal AWGN. Como ya se ha visto es conveniente utilizar en este caso el denominado filtro apareado. Se repasarán las características que tiene el filtro apareado primero en el caso de un canal donde la única interferencia es el ruido y luego cuando el canal agrega además distorsión debido al fading por ejemplo.

## 1.2. Filtro de recepción

### 1.2.1. Canal ideal con ruido

En este primer análisis repasaremos propiedades para un canal donde  $h_{LP} = \delta(t)$  y el ruido del canal es estacionario en sentido amplio y de media nula. Se asumirá también que la sincronización en frecuencia, fase y temporal es perfecta en este primer análisis. Como se vio anteriormente es conveniente usar un filtro de recepción apareado  $p_{rx} = p_{tx}^*(-t)$ . La idea es que la señal

$$s(t) = \sum_k a[k] p_{tx}(t - kT_s) \quad (1.21)$$

se puede ver como una señal en el espacio generado por la base  $\{\Phi_k(t) = p_{tx}(t - kT_s)\}$ , donde los  $a[k]$  son las coordenadas complejas de la señal  $s(t)$  en dicho espacio. La señal recibida, luego de pasada a banda base y asumiendo que el canal es ideal (solo se agrega ruido aditivo) y no hay errores de sincronización es:

$$r_{LP}(t) = s(t) + w_{LP}(t) \quad (1.22)$$

Esta señal debido a la componente de ruido en general no pertenece al espacio generado por las  $\{\Phi_k(t) = p_{tx}(t - kT_s)\}$ . Pero para recuperar la señal  $s(t)$  se busca la señal que se encuentre a menor distancia de  $r_{LP}(t)$  en el espacio generado por la mencionada base, es decir que se proyecta  $r_{LP}(t)$  sobre dicho espacio:

$$\hat{r}_{LP}(t) = \sum_k \int_T r_{LP}(t) \Phi_k^*(t) dt \Phi_k(t) \quad (1.23)$$

$$x_k = \int_T r_{LP}(t) \Phi_k^*(t) dt \quad (1.24)$$

siendo  $x_k$  las coordenadas de  $\hat{r}_{LP}(t)$  en dicho espacio. También se vio que para obtener  $x_k$  se podía pasar la señal recibida en bandabase por un filtro de respuesta al impulso  $p_{rx} = p_{tx}^*(-t)$  y luego muestrear la señal obtenida ya que la salida de dicho filtro es:



$$x_k(t) = \int_T r_{LP}(\tau) p_{tx}^*(\tau - t) d\tau \quad (1.25)$$

$$x_k(0) = \int_T r_{LP}(\tau) p_{tx}^*(\tau) d\tau = x_k \quad (1.26)$$

Es decir que si utilizamos el filtro apareado visto, obtenemos la señal del espacio  $\{p_{tx}(t - kT_s)\}$  que se encuentra a menor distancia de la señal recibida con ruido.

El uso de este filtro tiene algunas propiedades de interés desde el punto de las comunicaciones que se analizarán a continuación.

Para comenzar se analizará que sucede con la relación señal a ruido (SNR). Se buscará ahora el filtro que maximiza el SNR de la señal muestreada a la salida del filtro. Llamaremos  $\beta(t)$  a la respuesta al impulso de este filtro para distinguirla de la  $p_{rx}(t)$  vista antes y luego se analizará la relación entre ambas. Si en el transmisor se introduce un impulso a la entrada del filtro de transmisión, la salida del filtro de recepción será

$$x(t) = \beta(t) * p_{tx}(t) + \beta(t) * w(t) \quad (1.27)$$

Ahora bien la parte de señal en el instante de muestreo es:

$$v(0) := \beta(0) * p_{tx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B(f) P_{tx}(f) df \quad (1.28)$$

utilizando la antitransformada de Fourier y donde  $B(f)$  y  $P_{tx}(f)$  son las transformadas de Fourier del filtro de recepción y de transmisión respectivamente. Por otra parte el espectro de potencia del ruido filtrado  $\eta(t) = w(t) * \beta(t)$  será  $S_{\eta\eta}(f) = |B(f)|^2 S_{ww}(f)$  y su autocorrelación en  $\tau = 0$ , que es independiente de  $t$  por ser estacionario en sentido amplio, será:

$$\sigma_{\eta\eta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2 S_{ww}(f) df \quad (1.29)$$

y por lo tanto la relación señal a ruido al muestrear será:

$$\frac{|v(0)|^2}{\sigma_{\eta\eta}^2} = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} B(f) P_{tx}(f) df|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2 S_{ww}(f) df} \quad (1.30)$$

**Teorema 1.1.** *El filtro de recepción que maximiza el SNR dado el filtro de transmisión  $P_{tx}(f)$  y en un canal ideal con ruido estacionario en sentido amplio y de media nula de densidad espectral de potencia  $S_{ww}(f)$  es :*

$$B(f) = \frac{c P_{tx}^*(f)}{S_{ww}(f)} \quad (1.31)$$

siendo  $c$  una contante arbitraria no nula. En ese caso el SNR vale:

$$\frac{|v(0)|^2}{\sigma_{\eta\eta}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P_{tx}(f)|^2}{S_{ww}(f)} df \quad (1.32)$$

Este teorema se prueba de manera simple utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la integral del numerador de la ecuación 1.30. Antes de aplicar esta desigualdad se multiplica y divide el integrando por  $\sqrt{S_{ww}(f)}$ . Por último para hallar el máximo se observa en que condición la desigualdad vale con igualdad, es decir cuando uno de los integrandos es proporcional al conjugado del otro. La demostración detallada se deja a cargo del lector.

La siguiente pregunta es qué sucede si el ruido es blanco Gaussiano. En ese caso,  $S_{ww}(f) = \frac{N_0}{2}$ . Como la constante  $c$  es arbitraria entonces:

$$B(f) = P_{tx}^*(f) \quad (1.33)$$

$$\beta(t) = p_{tx}^*(-t) \quad (1.34)$$

Es decir que en este caso se encuentra que el filtro que maximiza el SNR es el mismo filtro que proyecta la señal recibida sobre el espacio de las señales generadas por la base  $\{p_{tx}(t - kT_s)\}$ . Se debe observar que en este caso, la respuesta al impulso de ambos filtros  $v(t) = p_{tx}(t) * p_{tx}^*(-t)$  es la autocorrelación de  $p_{tx}(t)$ . Esta autocorrelación cuanto mayor es el ancho de banda de la señal mas “concentra la energía entorno a  $\tau = 0$ ” y por lo tanto maximiza la SNR.

Si bien este análisis se realizó para un pulso aislado, en la medida que los filtros cumplan la condición de Nyquist, es decir que la autocorrelación del pulso se anule en todos los múltiplos de  $kT_s$  con  $k \neq 0$  el análisis sigue siendo válido.

### 1.2.2. Canal no ideal

Se analizará ahora que sucede si el canal tiene una respuesta al impulso general en banda base  $h(t)$  que ya no es simplemente  $\delta(t - \tau)$ . En esta  $h(t)$  se asumirá que se agrega la respuesta al impulso del filtro de transmisión y del canal para simplificar la notación.

La salida de este canal en banda base es la señal  $r_{LP}(t)$ . Posteriormente la señal se pasa por un filtro de respuesta al impulso  $p_{rx}(t)$  obteniendo la señal  $x(t)$  que se muestrea cada tiempo de símbolo  $T_s$ . Se obtiene entonces las muestras  $x_d[n] = x(nT_s)$ . La primera pregunta que se formulará es si es posible reconstruir con la información de la señal  $x_d[n]$  la información contenida en las señales originales, en particular:

1. ¿ contiene  $x_d[n]$  toda la información de  $r_{LP}(t)$  ?

y luego

2. ¿ contiene  $x_d[n]$  toda la información de  $s[n]$ ?

Se asumirá en este primer análisis que no hay ruido. La respuesta a las preguntas anteriores es: “depende del filtro  $p_{rx}$ ”. En primer lugar se debe observar que es necesaria la existencia de un filtro  $p_{rx}$ . No filtrar antes de muestrear puede hacer que pierda la información de  $r_{LP}(t)$ . Si la respuesta al impulso del canal  $h(t)$  es tal que  $h(nT_s) = 0 \forall n$ , entonces  $x_d[n] = 0 \forall n$  y no es posible recuperar la información. Sin embargo aún en este caso poniendo un filtro adecuado es posible recuperar la señal.

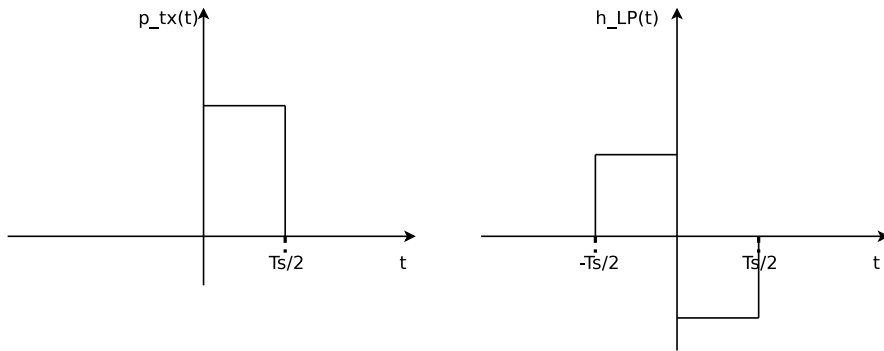


Figura 1.1: Ejercicio 1.1

Se verá que siempre existe un filtro de recepción que permite reconstruir  $r_{LP}(t)$  a partir de las muestras  $x_d[n]$ .

**Teorema 1.2.** *Dado cualquier canal de transferencia  $H(f)$ , si el filtro de recepción, tiene transferencia  $H_{rx}(f) = H^*(f)$ , es posible reconstruir  $r_{LP}(t)$  de las muestras  $x_d[n]$ . Si además se cumple que:  $\sum_k \left| H\left(f + \frac{k}{T_s}\right) \right|^2 > 0$  entonces, es también posible reconstruir  $s[n]$ .*

La demostración de este Teorema se encuentra en el apéndice de este capítulo.

El teorema anterior dice que apareando el filtro de recepción al filtro de transmisión más el canal, siempre es posible reconstruir  $r_{LP}(t)$  y además cuando se cumple la condición:  $\sum_k \left| H\left(f + \frac{k}{T_s}\right) \right|^2 > 0$  se puede también reconstruir  $s[n]$ .

Una observación importante sin embargo, es que en un canal no ideal aparear solo el pulso de transmisión puede hacer que se pierda información y no se pueda recuperar  $r_{LP}(t)$ . Si se elige  $p_{rx}(t) = p_{tx}^*(-t)$  y el canal tiene respuesta al impulso  $h_{LP}(t)$ , la transferencia discreta total desde  $s[n]$  a  $x_d[n]$  será la siguiente integral de convolución:

$$h[n] = \int h_{LP}(t)r_p(nT_s - t)dt \quad (1.35)$$

donde  $r_p$  es la autocorrelación del pulso de transmisión. Si por ejemplo, el pulso de transmisión está acotado a  $(0, \frac{T_s}{2})$  su autocorrelación será una señal en general simétrica respecto del origen y acotada a  $(-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2})$ . Si la respuesta al impulso del canal  $h_{LP}(t)$  fuera antisimétrica respecto del origen, la integral anterior daría cero para todo  $n$ .

**Ejercicio 1.1.** *Mostrar que si el pulso y el canal utilizados tienen respuesta al impulso que se muestra en la figura 1.1, entonces utilizar como filtro de recepción el apareado del filtro de transmisión y luego muestrear puede hacer perder información.*

De lo anterior se deduce que si se utiliza un filtro apareado al filtro de transmisión y el canal  $p_{rx}(t) = h^*(-t)$  o en frecuencia  $H_{rx} = H^*(f)$  y luego se muestrea no hay pérdida de información de la secuencia  $x_d[n]$  respecto de la señal  $r(t)$ . Si además se

cumplen las condiciones del Teorema anterior tampoco hay pérdida de información respecto de la secuencia de la fuente  $s[n]$ . La siguiente pregunta es si este filtro apareado es el único filtro con el cual no hay pérdida de información respecto de  $r(t)$ . La respuesta a esta pregunta es que no es el único. Por ejemplo cualquier filtro de la forma  $H_{rx}(f) = H^*(f)D(f)$  con  $D(f) > 0$  para todo  $f$  también es un filtro sin pérdida de información. La ventaja sin embargo de utilizar como filtro de recepción el apareado  $H^*(f)$  es que este filtro maximiza el SNR en el tiempo de muestreo, para el caso de ruido blanco gaussiano.

**Ejercicio 1.2.** *Opcional.* a) Probar que cualquier filtro de recepción elegido de la siguiente forma es también un filtro sin pérdida de información.

$H_{rx}(f) = H^*(f)D(f)$  con  $D(f) > 0$  para todo  $f$ . Observar que se puede probar extendiendo la demostración del Teorema 1.2. b) Probar que el filtro de recepción que maximiza el SNR en el caso de que se tenga ruido gaussiano coloreado de densidad espectral  $S_{ww}(f)$  tiene la forma  $B(f) = \frac{H^*(f)}{S_{ww}(f)}$ . Ver que es tan solo extender lo ya visto para el canal ideal. Mostrar que este filtro no pierde información.

c) Muchas veces se utiliza un filtro de recepción de la forma  $H_{rx}(f) = H^*(f)D(f)$  donde  $D(f)$  se elige de forma tal que blanquee el ruido que sale del filtro  $H^*(f)$  que no es blanco. ¿este filtro compuesto del filtro apareado al canal más el blanqueador es un filtro sin pérdida de información?

### 1.3. Estimación óptima de secuencias de símbolos

La probabilidad de que el símbolo transmitido  $s[n]$  en un cierto instante sea  $s_k$ , dado que se ha recibido  $r[n]$  es  $p(s[n] = s_k/r[n])$  o  $p(s_k/r)$  para simplificar la notación. Esta probabilidad se denomina probabilidad a posteriori y cuando se busca el símbolo  $s_k$  que maximiza esta probabilidad, se dice que el símbolo estimado  $s_{est}$  es el máximo a posteriori o MAP.

Por otro lado, la función densidad de probabilidad de que se reciba la señal  $r$  dado que el símbolo enviado es  $s_k$  es  $f(r/s_k)$  y esta función se llama función de verosimilitud. El estimador que maximiza esta función se denomina estimador de máxima verosimilitud o ML. La relación entre ambos se puede ver de la ley de Bayes

$$p(s_k/r) = \frac{f(r/s_k)p(s_k)}{\sum_k f(r/s_k)p(s_k)} \quad (1.36)$$

teniendo en cuenta que la sumatoria de la ecuación anterior es en todos los  $k$  no depende del símbolo transmitido. Si los símbolos son equiprobables entonces ambas probabilidades coinciden a menos de una constante. Por lo tanto, en el caso que los símbolos son equiprobables MAP y ML coinciden.

Otra observación importante es que si el canal no es ideal y por ejemplo introduce ISI, existe información del símbolo enviado en el tiempo  $n$  ( $s[n]$ ) en todos los símbolos recibidos en  $n$  y en las  $L$  muestras posteriores a  $n$  (siendo  $L$ , el largo de ISI del canal). Por lo tanto para detectar el símbolo enviado en  $n$  mirar toda la secuencia de señales recibidas desde  $n$  hasta  $n + L$  aporta información y debería mejorar la estimación.

También debido a que la fuente  $s[n]$  puede tener memoria, existirá correlación entre  $s[n]$  y las muestras recibidas anteriores a  $n$  y por lo tanto también estas muestras pueden aportar información para decidir el símbolo enviado en el tiempo  $n$ .

En general conviene que la detección no se haga en función de muestras individuales, sino de secuencias. Por lo tanto, se hablará de la probabilidad a priori  $p(\mathbf{s}_k/\mathbf{r})$  de que la secuencia enviada sea  $\mathbf{s}_k$  dado que se recibió la secuencia  $\mathbf{r}$ . La secuencia estimada que se obtiene de maximizar esta probabilidad se denomina estimador MAP. Lo mismo se aplica para el caso de máxima verosimilitud, denominando estimador ML al que maximiza:  $f(\mathbf{r}/\mathbf{s}_k)$  y ambos coincidirán si los símbolos son equiprobables.

### 1.3.1. Probabilidades de error y estimadores MAP o ML

La probabilidad de decodificar erroneamente una secuencia de símbolos cuando la secuencia de símbolos que se envía es  $\mathbf{s}_k$  es

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_k) = 1 - \int_{\mathcal{R}_k} f(\mathbf{r}/\mathbf{s}_k) d\mathbf{r} \quad (1.37)$$

donde  $\mathcal{R}_k$  es la región tal que si la secuencia recibida cae en esa región la decodificación es correcta. De esta ecuación operando se puede ver que la probabilidad media de error sobre todos los símbolos es:

$$\mathcal{P}_e = \sum_k \mathcal{P}_e(\mathbf{s}_k) p(\mathbf{s}_k) \quad (1.38)$$

$$= 1 - \int_{\mathcal{R}} f(\mathbf{r}) p(\mathbf{s}_k/\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.39)$$

donde la región  $\mathcal{R}$  es la unión de todas las regiones disjuntas  $\mathcal{R}_k$ . La función  $f(\mathbf{r})$  se define como  $f(\mathbf{r}) = \sum f(\mathbf{r}/\mathbf{s}_k) p(\mathbf{s}_k)$ .

De esta ecuación, se puede ver que minimizar la probabilidad media de error de la secuencia es equivalente a maximizar la probabilidad a priori para cada secuencia  $\mathbf{s}_k$ . Por lo tanto, la estimación utilizando MAP minimiza la probabilidad media de error de la secuencia. Si todos los símbolos son equiprobables, entonces el estimador ML minimiza la probabilidad media de error de la secuencia.

### 1.3.2. ML en el caso de ruido gaussiano blanco

Se supone que se tiene una secuencia recibida de  $K$  muestras  $\mathbf{r}$  y se quiere estimar las  $K$  muestras correspondientes que fueron enviadas  $\mathbf{s}$ , de forma tal que  $f(\mathbf{r}/\mathbf{s}_k)$  sea maximizada. Si la constelación tiene  $M$  símbolos,  $\mathbf{s}_k$  es uno de las  $M^K$  posibles secuencias. En esta sección se asume que se cumple que:

$$r[n] = s[n] + w[n]$$

Si se envía el símbolo  $s_k[n]$  como  $w$  es un ruido gaussiano y blanco, cada muestra  $r[n]$  tendrá distribución gaussiana de media  $s_k[n]$  y varianza  $\sigma_w$ . Además estas muestras son independientes. Por lo tanto,

$$f(\mathbf{r}/\mathbf{s}_k) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \right)^K \exp \frac{-\sum_{n=0}^{K-1} (r[n] - s_k[n])^2}{2\sigma_w^2} \quad (1.40)$$

Por lo tanto, se puede ver que encontrar el estimador ML es equivalente a minimizar:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = \sum_{n=0}^{K-1} (r[n] - s_k[n])^2 \quad (1.41)$$

es decir, la distancia euclídea entre ambas secuencias.

Resumiendo si todos los símbolos tienen la misma probabilidad ML es igual a MAP y en el caso de un canal AWGN, ML es equivalente a minimizar la distancia euclídea entre la secuencia enviada y la recibida. También se debe resaltar que MAP es equivalente a minimizar la probabilidad media de error de toda la secuencia, lo que no implica que se minimiza la probabilidad de error de cada símbolo.

### 1.3.3. El algoritmo de Viterbi y el diagrama de Trellis

El cálculo del estimador ML para secuencias de símbolos es un problema complejo. Aún en un canal AWGN ideal en que es equivalente a calcular la distancia mínima entre la salida y la entrada, implicaría recorrer todas las posibles secuencias de símbolos y para cada una calcular la distancia con la secuencia recibida. Este procedimiento tiene un costo computacional muy alto. Viterbi desarrolló un algoritmo que se puede aplicar a un canal AWGN con ISI. El algoritmo de Viterbi se basa en modelar el canal como un filtro FIR y en considerar este filtro como una máquina de estados, de la misma forma que se modelaron los códigos convolucionales cuando se utilizó el algoritmo de Viterbi para decodificar estos códigos.

Un filtro FIR se puede modelar como una máquina de estados donde el estado está dado por el valor de la secuencia de entrada al filtro en los  $L - 1$  instantes previos. Es decir que el estado será  $(s(n - 1), \dots, s(n - (L - 1)))$ . Con este estado y de acuerdo a la secuencia de entradas que se reciban se puede construir un diagrama de Trellis al igual que en los códigos convolucionales. La salida  $y$  del filtro será:  $y[n] = h_0s[n] + h_1s[n - 1] + \dots + h_{L-1}s[n - L + 1]$ . Utilizando esta función se puede calcular el valor de la salida para cada transición del diagrama de Trellis.

**Ejemplo 1.1.** Veamos un ejemplo. Se tomará el caso particular en el cual el canal se modela como un filtro FIR con tres taps según se muestra en la figura 1.2.

El diagrama de Trellis correspondiente a la figura 1.2, asumiendo que es un sistema PAM, con símbolos 1, -1 y el sistema comienza en el estado (1, 1) se muestra en la figura 1.3. En el diagrama se muestran para cada estado y las entradas posibles 1, -1, las transiciones de estado y la salida correspondiente del canal. Además se muestra para una secuencia de entrada específica el recorrido de estados y las salidas correspondientes.

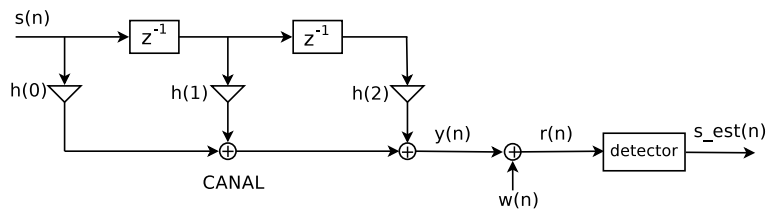


Figura 1.2: Ejemplo Viterbi

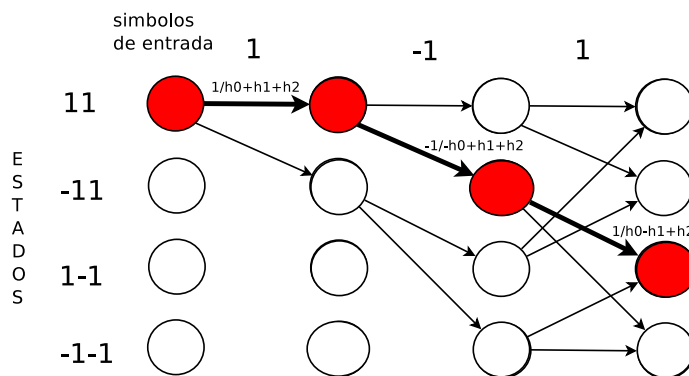


Figura 1.3: Ejemplo Diagrama de Trellis del modelo de la Figura 1.2 para un sistema PAM. Si la secuencia de entrada es la indicada en la figura se recorren los estados en rojo y las salidas serán las correspondientes al camino marcado en negrita e indicadas en la Figura.

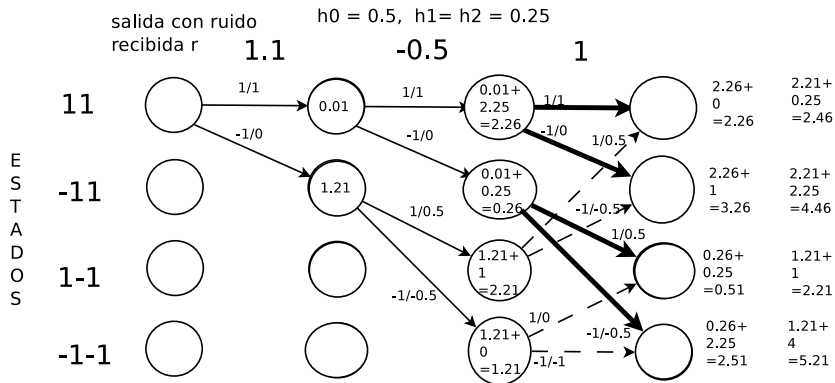


Figura 1.4: Ejemplo del cálculo de costos para la secuencia recibida con ruido que se indica en la figura del modelo de la Figura 1.2 para los taps del filtro indicado en la figura.

El algoritmo de Viterbi, realizará sobre el diagrama de Trellis el recorrido “inverso” al visto en el ejemplo. Es decir, tratará de reconstruir la secuencia de entrada  $s$ , dada una secuencia de salida  $y$ , o mejor aún una secuencia de salida con ruido  $r$ . Para tal fin, dada una secuencia recibida con ruido  $r$ , se calculará el costo de cada transición como  $(r[n] - y[n])^2$ . Recorriendo el diagrama desde el primer símbolo recibido se irá sumando los costos. En la figura 1.4 tal se muestra para el canal del ejemplo anterior el diagrama de Trellis para los tres primeros valores de la secuencia con ruido recibida (en este ejemplo  $\{1.1, -0.5, 1\}$ ) y donde en este caso se han tomado como taps  $h_0 = 0.5, h_1 = 0.25, h_2 = 0.25$ . En el diagrama se muestra el costo acumulado para cada símbolo recibido de la secuencia. Para los dos primeros símbolos hay un único camino y el costo acumulado se muestra en cada círculo que representa el estado, para el tercer símbolo recibido hay dos caminos posibles a cada estado que se muestran a la derecha del estado. En la primera columna se muestra para la transición marcada en negrita y en la segunda columna el costo acumulado para el camino marcado en línea punteada.

En el proceso se utiliza el algoritmo de poda de Viterbi que se utiliza también en codificación, con el cual de los caminos que llegan a un nodo del diagrama de Trellis se pueden eliminar todos los caminos que conducen a ese nodo y que no sean el camino de costo mínimo hasta ese nodo. Esto se muestra en la figura 1.5 para el ejemplo anterior, donde se eliminaron todos los caminos posibles hasta haber recibido el tercer elemento de la secuencia. A medida que se sigan recibiendo más elementos de la secuencia se irán podando de la misma forma otros caminos.

De esta forma al llegar al final del diagrama se identifica la secuencia de de entradas  $s[n]$  que minimizan la distancia  $\sum_{n=0}^{K-1} (r[n] - y[n])^2$ .

Observar que en el ejemplo anterior, hasta el tercer elemento recibido de la secuencia lo único que se puede afirmar es que el símbolo que es más probable que se haya enviado como primer elemento de la secuencia es un 1.

En este punto se deben hacer varias consideraciones. En primer lugar, en general con las  $K$  salidas del vector  $r$  se logran decodificar efectivamente  $K - D$  entradas. Esto se debe a que en el proceso de poda, por cada nuevo símbolo recibido no se



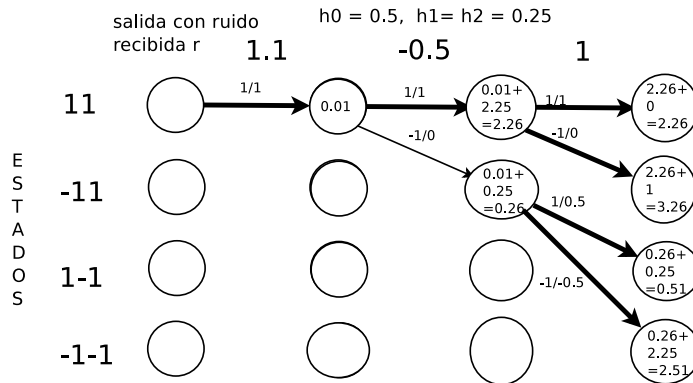


Figura 1.5: Ejemplo de poda del cálculo de costos para la secuencia recibida con ruido que se indica en la figura del modelo de la Figura 1.2 para los taps del filtro indicado en la figura.

logran podar todos los caminos menos uno hasta ese punto, sino que en general queda un único camino hasta cierto punto anterior del diagrama y a partir de allí más de uno posible. Ese valor  $D$  que se le suele llamar retardo de decodificación, es un valor que varía en cada iteración del algoritmo y no es fácil ni siempre posible dar una cota en función del largo  $L$  del filtro.

En segundo lugar, no se está minimizando  $\sum_{n=0}^{K-1} (r[n] - s_k[n])^2$  como requería el algoritmo ML en el caso de ruido blanco sino la distancia con  $\mathbf{y}$ . Si entre la secuencia  $\mathbf{s}$  y la secuencia  $\mathbf{y}$  existiera una relación biunívoca, entonces no habría problema y el algoritmo de Viterbi daría un estimador de ML en el caso de ruido blanco y gaussiano. La relación entre estos dos vectores viene dada por el canal, es decir

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(L-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \dots \\ s(L-1) \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Si  $h_0$  es diferente de 0, entonces este sistema es invertible y a cada vector  $\mathbf{s}$  le corresponde un vector  $\mathbf{y}$  y viceversa. En estas condiciones entonces el algoritmo de Viterbi, brinda el estimador ML si el canal es AWGN y además, si los símbolos son equiprobables este estimador es también el estimador MAP y por tanto minimiza la probabilidad de error media de la secuencia. Como se mencionó anteriormente para asegurarse de tener ruido blanco luego del filtro apareado al canal es necesario utilizar un filtro blanqueador.

**Ejercicio 1.3.** 1. Considere un canal modelado como un filtro FIR con la siguiente transferencia:  $H(z) = 1 + 0,5z^{-1}$ .

a) Construya el diagrama de Trellis.

b) Si la secuencia de entrada es  $\{1; -0,4; -0,8; 0,1; 1,1\}$ , Corra el algoritmo de Viterbi en el diagrama de Trellis. ¿cuáles de los símbolos  $s(n)$  pueden ser decodificados cuando llegaron estos 5 símbolos?

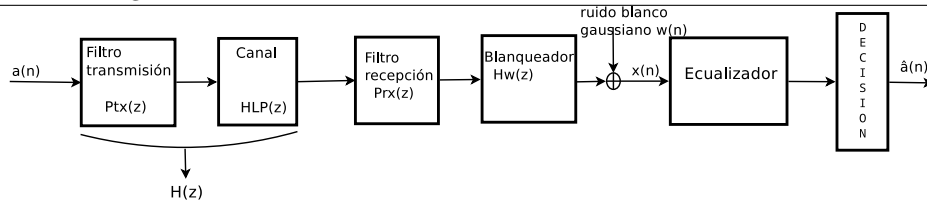


Figura 1.6: Modelo en tiempo discreto

c) Si ahora en lugar de la secuencia anterior se recibe

$$r[n] = \{1; -0,4; -0,8; 0,1; 0,1; 0,1; 1,1\},$$

Corra el algoritmo de Viterbi en este caso. ¿cuál es el retardo de decodificación de  $s(2)$  y como se compara con el caso anterior?

2. GnuRadio tiene un bloque denominado Viterbi Combo (de Viterbi Trellis Combination) que puede ser utilizado tanto para codificación como para ecualización ML. Asuma que se tiene un canal (pulso Tx+canal+pulso Rx) modelado como un filtro FIR con los coeficientes del ejemplo 1.1. Se adjunta el código de dicho sistema en GnuRadio Companion. Observar la salida del receptor. Agregar un bloque Viterbi Combo. En este caso se le debe pasar como parámetros: 1. el archivo donde se encuentra la máquina de estados especificada. 2. El tamaño de bloque. El estado inicial y final (-1 si no se especifica). La dimensión de la constelación (1 en este caso). La Métrica, euclídea en este caso como se vio en esta sección. La Constelación, en este caso corresponde a un mapeo entre las salidas especificadas en la máquina de estado y el valor de la salida correspondiente para el modelo de canal.

Analizar la salida y compararla con la entrada. Para esto es conveniente un vector source y poner diferentes secuencias de datos de entrada y verificar que se obtiene la secuencia correcta. Agregar ruido y verificar en qué niveles de ruido comienza a cometer muchos errores.

## 1.4. Ecualización Lineal

La ecualización utilizando el algoritmo de Viterbi en el caso de ruido blanco gaussiano y con símbolos equiprobables minimiza la probabilidad media de error de la secuencia de símbolos enviados. Por este motivo en algunos textos se dice que este algoritmo es óptimo. Sin embargo, la implementación del algoritmo de Viterbi tiene un costo computacional alto y en algunos casos prácticos por este motivo no se puede implementar. Por esta razón, se han buscado formas de ecualizar más simples, probablemente con peor desempeño pero que den un compromiso razonable entre costo computacional y grado de ecualización.

Se verán dos formas de ecualizar el canal mediante filtros lineales: ecualización “zero forcing” (se denominará ecualización ZF) y ecualizadores que minimizan el error cuadrático medio (se denominarán ecualizadores MSE).

En esta sección se trabajará sobre el modelo en tiempo discreto del sistema como se muestra en la figura 1.6.

Respecto del filtro de recepción existen dos opciones. Si se desea que el filtro maximice la relación señal a ruido es necesario que este filtro esté apareado al filtro de recepción y el canal:  $h(t) = p_{tx}(t) * h_{LP}(t)$ . Además como se vio este filtro asegura

que no se pierde información (siempre que el canal cumpla las condiciones vistas y como también se vio eso no necesariamente pasa si se utiliza un filtro apareado solo al filtro de transmisión).

Para que esto sea posible es necesario conocer o tener una identificación de la transferencia del canal  $h_{LP}(t)$ . En muchos sistemas de comunicación se conoce esta respuesta al impulso o es posible estimarla (por ejemplo a partir del envío de una secuencia conocida por transmisor y receptor) y se coloca un filtro de recepción  $p_{rx}(t) = h^*(-t)$ . En otros casos sin embargo, no se conoce la transferencia del canal y no se tiene una forma de estimarla. En estos casos se utiliza un filtro de recepción apareado al filtro de transmisión solamente es decir,  $p_{rx}(t) = p_{tx}^*(-t)$ .

Estas dos opciones hacen que la ecualización sea algo diferente en un contexto (se conoce la respuesta al impulso del canal) que en el otro (la respuesta al impulso del canal no es conocida).

Otro aspecto a considerar en ambos contextos es el ruido. Aún si se asume que el ruido en el canal es AGWN, el ruido a la salida del filtro de recepción y de muestrear la señal será gaussiano pero no blanco, salvo que el filtro de recepción cumpla la ecuación

$$\frac{1}{T_s} \sum_k \left| P_{rx} \left( f + \frac{k}{T_s} \right) \right|^2 = c \quad (1.43)$$

Observar que esto se cumple si el filtro de recepción verifica el criterio de Nyquist, por ejemplo si es un filtro SRRC (square root raised cosine). Si no se cumple la condición anterior, se tiene a la salida del muestreador ruido gaussiano no blanco. Para algunos algoritmos es necesario que el ruido sea blanco (por ejemplo el de Viterbi visto antes en este capítulo). Por lo tanto, en muchos casos se utiliza luego de muestrear un filtro “blanqueador” que transforme el ruido no blanco, en ruido blanco.

En esta sección se asumirá que se utiliza como filtro de recepción un filtro apareado al canal más el filtro de transmisión, es decir que:

$$P_{rx}(z) = H^*(z^{*-1}) \quad (1.44)$$

y que a continuación se utiliza un filtro blanqueador antes del ecualizador que tendrá transferencia

$$H_w(z) = \frac{1}{H^*(z^{*-1})} \quad (1.45)$$

Puede parecer absurdo si se mira el modelo en tiempo discreto que luego de un filtro  $P_{rx}(z) = H^*(z^{*-1})$  se coloque un filtro que “anula” esta transferencia. No se debe olvidar que en la realidad el primer filtro se coloca antes de muestrear para maximizar el SNR en el instante de muestreo y el segundo se coloca luego de muestrear para blanquear el ruido.

En resumen el conjunto filtro de transmisión, canal, filtro de recepción, se puede ver en el caso que se utilice un blanqueador como un sistema cuya transferencia es

$H(z) = P_{tx}(z)H_{LP}(z)$  y por lo tanto se ecualizará la señal que se obtiene a la salida de este filtro. En el dominio del tiempo la entrada al ecualizador será:

$$x[n] = \sum_k a[k]h[n-k] + w[n] \quad (1.46)$$

En esta ecuación, si no se utiliza un blanqueador entonces habrá que hacer dos consideraciones:  $h$  debe incluir también el filtro de recepción, y además el ruido quedará filtrado por el filtro de recepción.

El ecualizador será un filtro  $Q(z)$  y el canal más el ecualizador será un filtro  $V(z) = H(z)Q(z)$ . La salida del canal y ecualizador ( $u[n]$ ) cumplirá entonces que

$$u[n] = \sum_k a[k]v[n-k] + \sum_j w[j]q[n-j] \quad (1.47)$$

$$= a[n]v[0] + \sum_{k \neq n} a[k]v[n-k] + \sum_j w[j]q[n-j] \quad (1.48)$$

habitualmente se normaliza  $v[0] = 1$  y por lo tanto el segundo término de la ecuación representa la interferencia por ISI y el tercero la componente de ruido. El problema que se presenta entonces es cómo elegir los coeficientes del filtro ecualizador  $q[n]$ . Se verán en esta sección dos criterios. En un primer caso se considerará un sistema con  $SNR = \infty$ , es decir con potencia de ruido cero. En el segundo caso se estudiará un sistema con  $SNR$  finito.

#### 1.4.1. $SNR = \infty$ , criterio de distorsión de pico, ecualizador ZF

Si el  $SNR = \infty$  entonces la ecuación de la salida del equalizador se reduce a:

$$u[n] = \sum_k a[k]v[n-k] = \sum_k a[n-k]v[k] \quad (1.49)$$

la distorsión del sistema será:

$$D(q) = \sum_{k \neq n} a[n-k]v[k] \quad (1.50)$$

$$|D(q)| \leq \max |a[n]| \sum_{k \neq n} |v[k]| \quad (1.51)$$

$$\leq \max |a[n]| \sum_{k \neq n} \sum_j |h[j]| |q[k-j]| \quad (1.52)$$

Por lo tanto, para eliminar la distorsión se debe lograr que la respuesta al impulso del filtro ecualizador  $q[n]$  verifiquen la siguiente condición:

$$v[n] = \sum_j h[j]q[n-j] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.53)$$

también se puede formular como la transformada  $z$  de esta ecuación, es decir que:

$$H(z)Q(z) = 1 \quad (1.54)$$

y por lo tanto el ecualizador debe invertir el canal:

$$Q(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (1.55)$$

Si el filtro ecualizador tiene infinitos taps es posible ecualizar perfectamente el canal y eliminar la interferencia inter-simbólica.

A la salida del ecualizador ZF si se considera que a la entrada hay ruido blanco gaussiano  $w[n]$  con densidad espectral de potencia  $\mathcal{N}_0$

$$v[n] = a[n] + \nu[n] \quad (1.56)$$

donde  $\nu[n]$  es un ruido gaussiano coloreado de densidad espectral de potencia:

$$S_\nu(e^{j\Omega}) = \mathcal{N}_0 |Q(e^{j\Omega})|^2 \quad (1.57)$$

$$= \frac{\mathcal{N}_0}{|H(e^{j\Omega})|^2} \quad (1.58)$$

y la varianza de este ruido es por lo tanto:

$$\sigma_\nu = T_s \int_{-\frac{1}{2T_s}}^{\frac{1}{2T_s}} \frac{\mathcal{N}_0}{|H(e^{j\Omega})|^2} df \quad (1.59)$$

Si se asume que la energía media de los símbolos se normaliza a 1, la relación señal a ruido queda de la forma

$$SNR_{ZF} = \frac{1}{T_s \int_{-\frac{1}{2T_s}}^{\frac{1}{2T_s}} \frac{\mathcal{N}_0}{|H(e^{j\Omega})|^2} df} \quad (1.60)$$

De esta ecuación se debe observar que si  $H(z)$  tiene ceros cerca del círculo unitario, entonces la relación señal a ruido tiende a cero. Esta es la principal desventaja de los ecualizadores ZF. En la medida que en su cálculo no se tuvo en cuenta el ruido, la inversión del canal hace que en frecuencias con “deep fading” se amplifique mucho el ruido y la SNR tienda a cero.

**Ejemplo 1.2.** Considere el canal con transferencia:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (1 - az^{-1}) \quad (1.61)$$

El ecualizador será:

$$Q(z) = \sqrt{1+a^2} \frac{z}{z-a} \quad (1.62)$$

Se deben considerar dos casos según  $|a| < 1$  ó  $|a| > 1$ .

1.  $|a| < 1$  En este caso es posible obtener una secuencia causal y estable, con región de convergencia (ROC)  $|z| > |a|$  (también una anticausal e inestable, con ROC  $|z| < |a|$  pero que no es de interés) de la forma:

$$q[k] = \sqrt{1+a^2} a^k y(k) \quad (1.63)$$

siendo  $y(k)$  un escalón unitario. Como se puede apreciar el ecualizador ZF en este caso tiene respuesta al impulso infinita. Como se mencionó antes en general los ecualizadores ZF necesitan infinitos taps. Por ejemplo si se quisiera implementar como un filtro transversal

$$Q(z) = \sqrt{1+a^2} \frac{1}{1-az^{-1}} = \sqrt{1+a^2} \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \quad (1.64)$$

1.  $|a| > 1$  En este caso si se quiere un filtro estable la ROC debe contener el círculo unitario y por lo tanto se tendrá un filtro anticausal.

$$q[k] = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} a^{k+1} y(-(k+1)) \quad (1.65)$$

siendo  $y(k)$  un escalón unitario.

En ambos casos si se utiliza la ecuación 1.60 operando se llega a que el SNR es

$$SNR = \frac{1}{N_0} \frac{||a|^2 - 1|}{1 + |a|^2} \quad (1.66)$$

Como se puede observar el SNR tiende a cero si  $a$  tiende a 1.

### Implementación del ecualizador ZF como un filtro FIR

En esta sección se verá cómo minimizar la distorsión sin en general anularla, utilizando como ecualizador un filtro FIR de largo  $2K$  en un canal que se modela como un filtro FIR de largo  $L$ . Por lo tanto

$$\min_q D(q) = \min_q \sum_{k=-K, k \neq 0}^{K+L-1} |v[k]| \quad (1.67)$$

$$= \min_q \sum_{k=-K, k \neq 0}^{K+L-1} \left| \sum_j h[j] q[k-j] \right| \quad (1.68)$$

Si se quisiera forzar a cero el mínimo se tienen  $2k + L - 1$  ecuaciones para igualar a 0 y  $2K - 1$  variables para ajustar y por lo tanto en general no es posible. Por lo tanto, con un filtro finito siempre hay una interferencia residual. El problema de optimización a resolver es el siguiente, tomando  $n = 0$  para simplificar la notación

$$\min_q D(q) \quad (1.69)$$

$$\text{sujeto a } \left| \sum_j h[j]q[-j] \right| = 1 \quad (1.70)$$

Este problema de optimización se prueba [1] que es un problema de optimización convexo y en el caso general debe ser resuelto mediante algún método numérico. Sin, embargo en el citado artículo se prueba también que si :

$$\frac{1}{|h[0]|} \sum_{j=1}^L |h[j]| < 1 \quad (1.71)$$

es decir que la interferencia no es excesivamente severa, entonces el óptimo del problema de optimización anterior es el mismo punto que se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones:

$$v[k] = 0 \quad \forall k, -K < k < K, k \neq 0 \quad (1.72)$$

$$v[0] = 1 \quad (1.73)$$

**Ejemplo 1.3.**  $H(z) = h[0] + h[1]z^{-1}$

Se busca un ecualizador con 3 taps, es decir  $K = 1 \{q[-1], q[0], q[1]\}$ .

La función de distorsión a minimizar en este ejemplo sería;

$$D(q) = |q[-1]h[0]| + |q[0]h[1] + q[1]h[0]| + |q[1]h[1]|$$

sujeto a la condición  $q[-1]h[1] + q[0]h[0] = 1$ .

Como se mencionó antes si  $\frac{|h[1]|}{|h[0]|} < 1$ , entonces el óptimo se obtiene de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$q[-1]h[0] = 0 \quad (1.74)$$

$$q[0]h[1] + q[1]h[0] = 0 \quad (1.75)$$

$$q[-1]h[1] + q[0]h[0] = 1 \quad (1.76)$$

de donde se obtiene:

$$q[-1] = 0 \quad (1.77)$$

$$q[0] = \frac{1}{h[0]} \quad (1.78)$$

$$q[1] = \frac{-h[1]}{h[0]^2} \quad (1.79)$$

$$(1.80)$$

La distorsión residual es  $|q[1]h[1]| = \frac{h[1]^2}{h[0]^2}$

Si se considera ahora el filtro ecualizador con los siguientes coeficientes:

$$q[-1] = \frac{1}{h[1]} \quad (1.81)$$

$$q[0] = 0 \quad (1.82)$$

$$q[1] = 0 \quad (1.83)$$

$$(1.84)$$

La distorsión de este filtro es  $|q[-1]h[0]| = \frac{h[0]}{h[1]}$

Si se verifica que  $\frac{|h[1]|}{|h[0]|} < 1$  como es de esperar la distorsión residual del filtro 1.80 ( $\frac{h[1]^2}{h[0]^2}$ ) es menor que la del filtro 1.84 ( $\frac{h[0]}{h[1]}$ ). Sin embargo, si la interferencia es severa,  $\frac{|h[1]|}{|h[0]|} > 1$ , el óptimo ya no sale de resolver el sistema de ecuaciones 1.76, lo que se puede observar ya que en ese caso por ejemplo el filtro 1.84 tiene menor distorsión residual.

**Ejercicio 1.4.** 1. En un transmisor PAM si se ingresa un 1, a la salida del muestreador posterior al filtro de recepción se obtiene:  $x_{-1} = 0,3; x_0 = 0,9; x_1 = 0,3$  y  $x_i = 0 \forall i \neq -1, 0, 1$

a) Encontrar un filtro ecualizador+blanqueador ZF ideal que anule completamente la ISI de esta señal. Este filtro será la cascada del blanqueador y el ecualizador propiamente dicho. Encontrar la transferencia del blanqueador y del ecualizador propiamente dicho.

b) Calcular un ecualizador+blanqueador ZF con tres taps.

c) Cuanto vale la salida del ecualizador+blanqueador  $q_m$  para  $m = -3, -2, 2, 3$ .

2. OPCIONAL: Repetir el ejercicio anterior para el caso  $x_{-1} = 0,3; x_0 = 1; x_1 = 0,2$  y calcular el ISI residual luego de ecualizar.

### 1.4.2. SNR finito, Ecualizador error cuadrático medio, MSE

En este caso lo que se buscará como criterio de ecualización que el error cuadrático medio sea mínimo, es decir que se minimice  $\epsilon$  definido por

$$e[n] = a[n] - \hat{a}[n] \quad (1.85)$$

$$\epsilon = \mathbb{E}[e[n]e^*[n]] \quad (1.86)$$

Teniendo en cuenta que:

$$x[n] = \sum_j a[j]h[n-j] + w[n] \quad (1.87)$$

$$\hat{a}[n] = \sum_j q[j]x[n-j] \quad (1.88)$$



$\hat{a}[n]$  se puede ver como una combinación lineal de los vectores  $x[n-j]$ . Por lo tanto la minimización del error se puede obtener de la condición de ortogonalidad del error respecto a los vectores  $x[n-j]$ , es decir,

$$\mathbb{E}[e[n]x^*[n-j]] = 0 \quad \forall j \quad (1.89)$$

$$\mathbb{E} \left[ \left( a[n] - \sum_k q[k]x[n-k] \right) x^*[n-j] \right] = 0 \quad \forall j \quad (1.90)$$

$$\sum_k q[k]r_{xx}[j-k] = r_{ax}[j] \quad \forall j \quad (1.91)$$

siendo  $r_{uv}$  la correlación de  $u$  y  $v$ .

Tomando Transformada  $z$  de la ecuación 1.91 se obtiene:

$$Q(z)S_{xx}(z) = S_{ax}(z) \quad (1.92)$$

siendo  $S_{uv}$  el espectro de potencia de los procesos  $u$  y  $v$ .

Por otra parte de la ecuación 1.87 multiplicando ambos miembros por  $a^*[n-k]$  y tomando valor esperado se obtiene:

$$\mathbb{E}[x[n]a^*[n-k]] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_j a[j]h[n-j] + w[n] \right) a^*[n-k] \right] \quad (1.93)$$

$$S_{xa}(z) = S_{aa}(z)H(z) + S_{wa}(z) \quad (1.94)$$

Teniendo en cuenta que  $S_{ax}(z) = S_{xa}^*(1/z^*) = \check{S}_{ax}(z)$  y que  $S_{aa}(z) = S_{aa}^*(1/z^*)$ . el filtro ecualizador MSE verifica:

$$Q(z) = \frac{S_{aa}(z)\check{H}(z) + \check{S}_{aw}(z)}{S_{xx}(z)} \quad (1.95)$$

Se asumirá en adelante la hipótesis que en la practica es razonable que el ruido y la señal de la fuente están no correlacionados y por tanto :  $r_{aw}(k) = 0$  y  $S_{aw}(z) = 0$ .

Es posible calcular  $S_{xx}$  de la siguiente forma:

$$r_{xx}(k) = \mathbb{E}[x[n]x^*[n-k]] \quad (1.96)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_j a[j]h[n-j] + w[n] \right) \left( \sum_l a^*[l]h^*[n-k-l] + w^*[l] \right) \right] \quad (1.97)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_j a[j]h[n-j] \right) \left( \sum_l a^*[l]h^*[n-k-l] \right) \right] + r_{ww}[k] \quad (1.98)$$

$$= \sum_{j,l} r_{aa}[j-l]h[n-j]h^*[n-k-l] + r_{ww}[k] \quad (1.99)$$

de donde,

$$S_{xx}(z) = S_{aa}(z)H(z)\check{H}(z) + S_{ww}(z) \quad (1.100)$$

y por lo tanto la transferencia del ecualizador MSE queda finalmente:

$$Q(z) = \frac{S_{aa}(z)\check{H}(z)}{S_{aa}(z)H(z)\check{H}(z) + S_{ww}(z)} \quad (1.101)$$

o en su respuesta frecuencial:

$$Q(e^{j\Omega}) = \frac{S_{aa}(e^{j\Omega})H^*(e^{j\Omega})}{S_{aa}(e^{j\Omega})|H(e^{j\Omega})|^2 + S_{ww}(e^{j\Omega})} \quad (1.102)$$

Observar que en el caso sin ruido el ecualizador MSE se reduce al ZF de la ecuación 1.55. También se debe observar que este ecualizador es en general de respuesta al impulso infinita al igual que en el caso del ZF.

Este ecualizador MSE cuando el SNR es muy alto se comporta de forma similar al ZF pero cuando el SNR es muy bajo la respuesta en frecuencia tiende a 0. El ecualizador MSE contempla el ruido y por tanto atenúa el problema de los polos del canal cerca del círculo unitario. Sin embargo, cuando el ruido no es nulo no ecualiza totalmente el canal.

**Ejemplo 1.4.** Considere el canal con transferencia:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1-az^{-1}) \quad (1.103)$$

$$\check{H}(z) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1-az) \quad (1.104)$$

El ecualizador será:

$$Q(z) = \sqrt{1+a^2} \frac{1-az}{1+a^2 + \mathcal{N}_0(1+a^2) - az - az^{-1}} \quad (1.105)$$

### Implementación del ecualizador MSE como un filtro FIR

Como se vio antes, en general el ecualizador MSE requiere de un filtro IIR. Veremos ahora qué sucede si se utiliza un filtro FIR como ecualizador. La ecuación 1.91 queda:

$$\sum_{k=-K}^K q[k]r_{xx}[j-k] = r_{ax}[j] \quad \forall j \quad (1.106)$$

Teniendo en cuenta además que la correlación entre los procesos  $x$  y  $a$  los introduce el canal que se modela como un filtro FIR de orden  $L$ ,  $r_{xx}[j-k] = 0$  si  $|j-k| > L$  y  $r_{ax}[j] = 0$  si  $|j| > L$ . La ecuación 1.106 se puede escribir de forma matricial como:

$$\mathbb{R}_{xx}\mathbf{q}_{opt} = \mathbf{r}_{ax} \quad (1.107)$$

siendo:  $\mathbb{R}_{xx}$  una matriz de dimensiones  $(2K+1) \times (2K+1)$  y donde el elemento  $\mathbb{R}_{xx}[i, j] = r_{xx}[i-j]$  y  $\mathbf{q}_{opt}$  y  $\mathbf{r}_{ax}$  dos vectores columna de dimensión  $(2K+1)$ . El elemento  $\mathbf{r}_{ax}[j] = r_{ax}[j]$ .

El filtro óptimo es entonces:

$$\mathbf{q}_{opt} = \mathbb{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{ax} \quad (1.108)$$

Por último, si se conoce el canal, la matriz  $\mathbb{R}_{xx}$  y el vector  $\mathbf{r}_{ax}$  se pueden calcular en función de los taps del canal. Se asume que el ruido y los símbolos no están correlacionados y que los símbolos son i.i.d.. Los elementos de la matriz se pueden calcular de la siguiente forma:

$$\mathbb{R}_{xx}[i, j] = r_{xx}[i-j] \quad (1.109)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \sum_{l=0}^L h[l]a[i-l] \sum_{m=0}^L h^*[m]a^*[j-m] \right] + \mathcal{N}_0\delta_{ij} \quad (1.110)$$

$$= E[|a[k]|^2] \sum_{l=0}^L h[l]h^*[l-[i-j]] + \mathcal{N}_0\delta_{ij} \quad (1.111)$$

$$(1.112)$$

Los elementos del vector se pueden calcular de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_{ax}[j] = \mathbb{E} \left[ a[k] \sum_{m=0}^L a^*[m]h^*[k-j-m] + w^*[k-j] \right] \quad (1.113)$$

$$= h^*[-j] \quad (1.114)$$

**Ejemplo 1.5.** Sea el canal + filtro de recepción con transferencia  $H(z) = h_0 + h_1z^{-1}$  y el ruido es blanco gaussiano con potencia  $\mathcal{N}_0$

$$\mathbb{R}_{xx} = \begin{pmatrix} h_0^2 + h_1^2 + \mathcal{N}_0 & h_0h_1 & 0 \\ h_0h_1 & h_0^2 + h_1^2 + \mathcal{N}_0 & h_0h_1 \\ 0 & h_0h_1 & h_0^2 + h_1^2 + \mathcal{N}_0 \end{pmatrix} \quad (1.115)$$

$$\mathbf{r}_{ax} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

**Ejercicio 1.5.** Repetir el ejercicio 1.4 para el caso de un ecualizador MSE infinito y con tres taps cuando el ruido del canal es blanco aditivo y con potencia  $\mathcal{N}_0$

## 1.5. Ecualización de espaciado fraccional

### 1.5.1. Introducción

En este capítulo se ha analizado el caso donde la señal recibida se muestrea a una tasa de una muestra por símbolo. Estos ecualizadores en la literatura se denominan

habitualmente baud rate equalizer (BRE). Se analizará en esta sección el caso donde se muestrea a más de una muestra por símbolo. Estos ecualizadores se denominan fractionally spaced equalizer (FSE).

En la arquitectura FSE se muestrea a una tasa mayor a  $T_s$  y el filtro apareado de recepción se implementa de forma digital. Luego del muestreo solo se realiza un filtrado antialiasing que se asumirá que se hace con un filtro ideal.

Por lo tanto, el filtro apareado y el ecualizador trabajan a una tasa de  $L$  muestras por símbolo. Posteriormente de la ecualización se hace un downsampling de tasa  $L$  para estimar los símbolos enviados.

La cascada del filtro apareado y el ecualizador se analiza muchas veces como un solo filtro.

Los ecualizadores FSE tiene ventajas y desventajas respecto de los ecualizadores BRE. La desventaja principal es que se requieren más taps en general y por tanto aumentan los requerimientos de memoria a medida que aumenta  $L$ . Sin embargo, algunas ventajas son muy importantes.

En primer lugar, el FSE exhibe una mayor inmunidad a los errores debidos a la sincronización temporal. En el caso de los ecualizadores BRE si hay un error de estimación temporal, se asumirá que se muestrea la señal  $x(t)$  en los tiempos  $kT_s + \tau_0$

$$x(kT_s + \tau_0) = \sum_j a[j]h(kT_s + \tau_0 - jT_s) + w(kT_s + \tau_0) \quad (1.117)$$

El espectro de frecuencia de la señal muestreada será entonces:

$$X_d(e^{j\Omega}) = A_d(e^{j\Omega}) \sum_k H\left(\frac{\Omega}{2\pi} + k\right) e^{j(\Omega + 2k\pi)\frac{\tau_0}{T_s}} \quad (1.118)$$

Si se observa la transferencia periódica del canal muestreado y se piensa en un pulso con exceso de ancho de banda, es posible que para ciertos valores de  $\Omega$  en el entorno de  $\pi$  y error de sincronización  $\tau_0$  que  $H\left(\frac{\Omega}{2\pi} + k\right) e^{j(\Omega + 2k\pi)\frac{\tau_0}{T_s}}$  y  $H\left(\frac{\Omega}{2\pi} - 1\right) e^{j(\Omega + 2\pi)\frac{\tau_0}{T_s}}$  sumen cero ó aproximadamente cero, haciendo prácticamente imposible ecualizar sin amplificar el ruido.

Diferente es el caso de muestrear la señal recibida cada un tiempo  $T' < \frac{T_s}{1+\alpha}$  donde  $\alpha$  es el exceso de ancho de banda.

En este caso los términos de la sumatoria  $H\left(\frac{\Omega}{2\pi} + k\right) e^{j(\Omega + 2k\pi)\frac{\tau_0}{T'}}$  no se solapan. Por lo tanto el ecualizador FSE para compensar el error en la sincronización temporal lo puede hacer solo con una compensación de fase y el problema que existan frecuencias en que la transferencia se anule no aparece.

La otra ventaja importante es la siguiente. Como se vio anteriormente para compensar perfectamente un canal modelado como un filtro FIR en el caso de ecualizadores BRE es en general necesario utilizar un filtro IIR, que no es implementable y por tanto se utilizan aproximaciones con filtro FIR pero que generan una distorsión residual. Por el contrario, con ecualizadores FSE es posible ecualizar completamente un canal FIR con un ecualizador FIR.

$$x(kT_s/L) = \sum_j a[j]h(kT_s/L - jT_s) + w(kT_s/L) \quad (1.119)$$

definiendo  $h(kT_s/L) = h_L[k]$ ,  $w(kT_s/L) = w_L[k]$ ,  $x(kT_s/L) = x_L[k]$  la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$x_L[k] = \sum_j a[j]h_L[k - jL] + w_L[k] \quad (1.120)$$

Si se supone que se utiliza un filtro ecualizador  $Q_L$  y que a la salida del ecualizador se sub-muestra para volver a tener una muestra por símbolo ( $\hat{a}[k]$ ). La transferencia desde  $a[k]$  hasta  $\hat{a}[k]$ , es

$$V(z) = H_L(z)Q_L(z)|_{\downarrow L} \quad (1.121)$$

Esta es la función que genera la distorsión en ausencia de ruido. El objetivo será lograr un ecualizador  $Q_L(z)$  que sea implementable como un filtro FIR tal que:

$$V(z) = H_L(z)Q_L(z)|_{\downarrow L} = 1 \quad (1.122)$$

Para diseñar un ecualizador de este tipo se puede por ejemplo plantear las ecuaciones MSE como se hizo para el ecualizador de tasa de símbolo y se llega a ecuaciones similares.

También existe un procedimiento alternativo para diseñar este filtro. Para entender este procedimiento es necesario entender un Teorema de Euclídes que en su demostración plantea una metodología que será de utilidad para diseñar el filtro.

## 1.6. Ecualizadores adaptivos

En los ecualizadores vistos anteriormente, se asume que se conoce el canal, que este es invariante en el tiempo y a partir de esta información se diseñan los ecualizadores. En general, no es cierto que se conozca la respuesta del canal, por lo que en la práctica lo que se hace es estimar el canal. Para hacerlo es necesario que se envíe información conocida por fuente y receptor. Para esto muchos sistemas contienen prefijos que anteceden a los mensajes o que se envían periódicamente para realizar esta estimación. El envío periódico es necesario además porque el canal en general no es invariante en el tiempo. Por lo tanto, es necesario que el ecualizador se adapte a las variaciones del canal. Existen diversos métodos para hacer ecualización adaptiva al canal. En esta sección veremos algunos ejemplos. El planteo general de muchos de estos métodos es formular el problema de ecualización como el problema de minimización de una función de costo  $\mathcal{J}(q)$ . Posteriormente se buscará dinámicamente utilizar un algoritmo iterativo como el algoritmo del gradiente para encontrar el mínimo de esta función. El empleo de un algoritmo iterativo hace que si el canal se modifica este algoritmo debería converger hacia el nuevo mínimo. En general como se dijo para minimizar esta función se utilizará una secuencia de datos conocidos enviados por la transmisor. Ahora bien, en muchos sistemas no es posible enviar datos para realizar la estimación del canal. En estos casos se utilizan técnicas conocidas como ecualización a ciegas (blind equalization BEQ). Se verá en primer lugar una técnica adaptiva que asume

la existencia de una secuencia de datos conocida y utiliza mínimos cuadrados (Least Mean Square, LMS). Posteriormente se estudiará una técnica de equalización a ciegas denominada Constant Modulus Algorithm (CMA).

### 1.6.1. Algoritmo adaptativo LMS

Se considera la siguiente función de costo:

$$\mathcal{J}(q) = \mathbf{E}[(a[k] - \hat{a}[k])(a^*[k] - \hat{a}^*[k])] \quad (1.123)$$

$$\hat{a}[k] = \sum_{j=-K}^K q[j]x[k-j] \quad (1.124)$$

$$= \mathbf{q}'\mathbf{x}(\mathbf{k}) \quad (1.125)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}) = (x(k+K), \dots, x(k), \dots, x(k-K))' \quad (1.126)$$

Con la anterior expresión, se puede calcular el gradiente del costo:

$$\mathcal{J}(q) = \mathbf{E}[e[k]e^*[k]] \quad (1.127)$$

$$\nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{J}(q) = \nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{E}[(a[k] - \hat{a}[k])e^*[k]] \quad (1.128)$$

$$= -\mathbf{E}[\mathbf{x}(k)e^*[k]] \quad (1.129)$$

y el algoritmo en este caso sería

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t + \beta\mathbf{E}[\mathbf{x}(k)e^*(k)] \quad (1.130)$$

Se deben realizar dos observaciones.

La primera es que se debe tener cuidado al derivar una función compleja respecto de una variable compleja (los taps  $\mathbf{q}$  pueden ser complejos). La definición de diferenciación en los complejos hace por ejemplo que no exista la derivada  $\frac{\partial z^*}{\partial z}$ , siendo esta una función muy simple.

Habitualmente en cálculo complejo se trabaja sobre funciones analíticas donde está bien definido el diferencial complejo. Sin embargo, en este problema podemos ver la necesidad de obtener extremos de funciones que no son analíticas. Para el estudio de extremos de funciones **reales** de variables complejas, se puede realizar una generalización del concepto de diferenciación compleja. La idea es considerar las funciones de variable compleja  $f(z, z^*)$  como funciones de  $\mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  y utilizar una extensión de la definición de derivada definiendo la derivada-R de una función real de variable compleja como:  $\frac{\partial f(z, z^*)}{\partial z} \Big|_{z^*=cte}$  y la derivada-R conjugada de una función real de variable compleja como  $\frac{\partial f(z, z^*)}{\partial z^*} \Big|_{z=cte}$ . Estas definiciones tiene la propiedad importante de coincidir en el caso de funciones analíticas con la definición de diferencial complejo.

Se prueba que a la condición necesaria y suficiente para que una función real de variable compleja  $f(z) = f(x, y)$ ,  $z = x + iy$  tenga un punto estacionario con respecto

a los parámetros reales  $r = (x, y) \in \mathcal{R}^2$  es que su R-derivada se anule. Quien quiera profundizar y formalizar en este aspecto puede consultar el trabajo [3] y las referencias que él contiene.

Para el cálculo del gradiente anterior se utilizó la derivada-R.

La segunda observación es que la ecuación 1.130 requiere el cálculo de valores esperados que sin conocimiento del canal es muy difícil de hacer en la práctica. Lo que habitualmente hace en el algoritmo LMS es aproximar ese valor esperado simplemente por:  $\mathbf{x}(k)\mathbf{e}(k)$  y el algoritmo es un algoritmo de gradiente estocástico que tiene la siguiente forma simple:

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t + \beta \mathbf{x}(k)e^*[k] \quad (1.131)$$

### 1.6.2. Ecuación a ciegas: Algoritmo CMA

La pregunta que origina el área de ecuación a ciegas (blind equalization) es si es posible ecualizar la señal recibida sin tener información del canal ni una muestra de entrenamiento conocida por el transmisor y el receptor. Lo único que se asume conocido es alguna estadística de los símbolos que se envían.

Se trabajó mucho empíricamente desde hace muchos años en lograr ecualizadores de este tipo a partir de proponer funciones que minimizaran algún costo que tenga en cuenta la diferencia en alguna propiedad estadística de los símbolos transmitidos y recibidos.

El primer resultado teórico relevante para comprender este problema se presenta en el trabajo de los años 80 de Benviste et al. [4]. En este trabajo los autores demuestran que la condición suficiente para la ecualización total de una señal sin ruido (ZF) es lograr que la distribución de los símbolos de salida sea igual a la de los símbolos de entrada. Sin embargo, esta propiedad es poco útil en la práctica porque lograr ecualizar la distribución no es un trabajo en general simple.

Sin embargo, uno de los trabajos que más ha aportado en este tema, es un trabajo de Shalvi et al. de los años 90 [5]. En este trabajo se prueba que para la ecualización total de un canal sin ruido, la condición necesaria y suficiente es que se cumplan las siguientes dos propiedades estadísticas entre los símbolos de entrada  $a[k]$  y salida  $b[k]$

$$\mathbf{E}[|b|^2] = \mathbf{E}[|a|^2] \quad (1.132)$$

$$\mathbf{K}(b) = \mathbf{K}(a) \quad (1.133)$$

donde  $\mathbf{K}(\cdot)$  es la función de Kurtosis de un proceso definida como

$$\mathbf{K}(a) = \mathbf{E}[|a|^4] - 2\mathbf{E}^2[|a|^2] - |\mathbf{E}[a^2]|^2 \quad (1.134)$$

La función de Kurtosis de una distribución de probabilidad tiene un significado intuitivo en estadística. El índice de Kurtosis refleja el grado de concentración de los valores de la densidad en la región central de la misma. A mayor índice de Kurtosis más puntiaguda es la densidad y cuanto menor más aplanada es la densidad. La distribución normal tiene índice de Kurtosis 3 y por eso muchas veces en la definición

del índice de Kurtosis de la ecuación 1.134 se le resta 3 para que las de índice positivo sean más puntiagudas que la normal y las con índice negativo más aplanadas que la normal.

La condición a la que se llega en este trabajo sí tiene sentido práctico porque ahora se deben igualar dos propiedades de la distribución y no toda la función.

Se verá con más precisión lo que se prueba en dicho artículo a continuación.

Sea  $v[k] = h[k] * q[k]$  la respuesta al impulso del canal y el ecualizador. Sea  $a[k]$  y  $\hat{a}[k]$  la entrada al canal y la salida del ecualizador. Se asume que la secuencia de entrada  $a[k]$ , es una secuencia de variables aleatorias (discretas o continuas), i.i.d., con media cero y distribución de probabilidad arbitraria, que existen los momentos hasta orden cuatro y que  $\mathbf{K}(a) \neq 0$ .

Se busca que

$$v[k] = e^{j\theta}(0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow m}{1}, 0, \dots, 0) \quad (1.135)$$

Es decir que la respuesta al impulso del sistema incluyendo el ecualizador sea una  $\delta$ . Más precisamente se busca que no modifique la señal de entrada a menos de un desfase  $\theta$  y un retardo  $m$ .

A partir de que  $\hat{a}[k] = v[k] * a[k]$  y de que la secuencia de entrada es i.i.d. se puede probar simplemente operando que:

$$\mathbf{E}[|\hat{a}[k]|^2] = \mathbf{E}[|a[k]|^2] \sum_j |v[j]|^2 \quad (1.136)$$

$$\mathbf{K}(\hat{a}[k]) = \mathbf{K}(a) \sum_j |v[j]|^4 \quad (1.137)$$

Hay que observar que el índice  $k$  en las ecuaciones anteriores es innecesario porque la secuencia es i.i.d.

**Teorema 1.3** (Shalvi y Weinstein). Si  $\mathbf{E}[|\hat{a}|^2] = \mathbf{E}[|a|^2]$  entonces:

1)  $\mathbf{K}(\hat{a}) \leq \mathbf{K}(a)$

2)  $\mathbf{K}(\hat{a}) = \mathbf{K}(a)$  si y solo si la respuesta al impulso del sistema ecualizado  $v[k]$  verifica 1.135.

*Prueba:*

Sea  $\mathbf{v}$  un vector tal que  $\sum_j |v[j]|^2 < K < \infty$ . Entonces,

$$\sum_j |v[j]|^4 \leq (\sum_j |v[j]|^2)^2 = \sum_j |v[j]|^4 + 2 \sum_j \sum_l |v[j]|^2 |v[l]|^2 \quad (1.138)$$

y para que se cumpla la igualdad todos los dobles productos del desarrollo de la parte derecha de la ecuación deben ser cero. Para que esto se cumpla solo una componente del vector puede ser no nula. Por lo tanto si  $\sum_j |v[j]|^2 = 1$  entonces:

a)  $\sum_j |v[j]|^4 \leq 1$ .

b)  $\sum_j |v[j]|^4 = 1$  si y solo si  $\mathbf{v}$  tiene una sola componente no nula y de valor 1.

De estas conclusiones la tesis del teorema queda probada utilizando las ecuaciones 1.136 y 1.137.



A partir de este teorema es fácil ver que es posible formular la ecualización como un problema de optimización:

$$\text{máx } \mathbf{K}(\hat{a}[k]) \quad (1.139)$$

$$\text{sujeto a :} \quad (1.140)$$

$$\mathbf{E}[|\hat{a}[k]|^2] = \mathbf{E}[|a[k]|^2] \quad (1.141)$$

En el mencionado artículo luego de diversas transformaciones de este problema de optimización con restricciones se concluye que dicho problema es equivalente al siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\text{mín } \left( \left( |\hat{a}[k]|^2 - \frac{\mathbf{E}[|a[k]|^4]}{\mathbf{E}[|a[k]|^2]} \right)^2 \right) \quad (1.142)$$

Diez años antes de esta publicación Godard [6] propuso la siguiente función de costo (la denominó función de dispersión) para realizar ecualización a ciegas:

$$\mathcal{D}^{(p)} = \mathbf{E}[|\hat{a}[k]|^p - R_p]^2 \quad (1.143)$$

donde  $R_p$  es alguna constante de la estadística de los símbolos. Propuso minimizar esta función para ecualizar.

A partir del cálculo del gradiente de la dispersión observó que el gradiente se anulaba cuando

$$R_p = \frac{\mathbf{E}[|a[k]|^{2p}]}{\mathbf{E}[|a[k]|^p]} \quad (1.144)$$

En particular el caso más utilizado fue el de  $p = 2$ , y a este método se le llamo CMA (“constant modulus algorithm”). En este caso la función de dispersión queda:

$$R_2 = \frac{\mathbf{E}[|a[k]|^4]}{\mathbf{E}[|a[k]|^2]} \quad (1.145)$$

Si los símbolos tienen módulo constante (QPSK por ejemplo), entonces minimizar la dispersión equivale a ecualizar el módulo de los símbolos recibidos :  $|\hat{a}(k)| = \sqrt{R_2}$ . Sin embargo, se observó que este ecualizador funcionaba bien aún para constelaciones que no tuvieran módulo constante. La explicación formal de esto como ya vimos, la dieron Shalvi et al. al demostrar que minimizar la dispersión  $\mathcal{D}^2$  equivale a ecualizar el el valor esperado del módulo al cuadrado y la función de Kurtosis que como se vio es condición necesaria y suficiente para ecualizar ZF el canal.

Definida la dispersión :

$$\mathcal{D}^{(2)} = \mathbf{E}[|\hat{a}[k]|^2 - R_2]^2 \quad (1.146)$$

$$\hat{a}[k] = \mathbf{q}'\mathbf{x}(k) \quad (1.147)$$

Se puede calcular el gradiente de esta función de costo con respecto al vector de los taps del ecualizador  $\mathbf{q}$  y aplicar el algoritmo del gradiente:

$$\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{D}^{(2)} = 2\mathbf{E}[(\hat{a}[k]^2 - R_2)\hat{a}[k]^* \mathbf{x}(k)] \quad (1.148)$$

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t - \mu(\hat{a}[k]^2 - R_2)\hat{a}[k]^* \mathbf{x}(k) \quad (1.149)$$

donde en la última ecuación al igual que en el algoritmo LMS se eliminó el valor esperado y se utiliza un algoritmo de gradiente estocástico.

**Ejercicio 1.6.** La ecuación 1.149 la implementa GnuRadio en el bloque CMA. Este bloque tiene como parámetros la cantidad de taps del ecualizador, el parámetro  $\mu$  (ganancia), y el módulo o valor  $R_2$  en la ecuación. El parámetro  $\mu$  debe ser un valor suficientemente pequeño para que converja el algoritmo. En general  $\mu = 0,01$  es un valor recomendado.

Ecualizar el sistema del ejercicio A.2 parte C. utilizando un bloque CMA de gnu-radio en lugar del filtro utilizado en dicho ejercicio. Estudiar como varía la ecualización al variar el número de taps: 3,7,11,21,31 por ejemplo. Estudiar la sensibilidad respecto de  $\mu$ .

# Apéndice A

## Material complementario

### A.1. Prueba de Teoremas

#### A.1.1. Teorema 1.2.

*Demostración.* La transformada de Fourier de la salida del filtro de recepción será:

$$S_d(e^{j2\pi f T_s})H(f)H_{rx}(f) = S_d(e^{j2\pi f T_s})|H(f)|^2 \quad (\text{A.1})$$

La Transformada de Fourier de la señal discreta  $x_d[n]$  es por lo tanto,

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{S_d(e^{j\Omega})}{T_s} \sum_k \left| H\left(\frac{\frac{\Omega}{2\pi} + k}{T_s}\right) \right|^2 \quad (\text{A.2})$$

Ahora debemos distinguir dos casos.

Caso 1. El más simple es cuando la sumatoria del término de la derecha de la ecuación A.2 es diferente de cero para todo  $\Omega$ . En ese caso se puede reconstruir la señal  $s[n]$  pasando la salida del muestreador por un filtro digital de transferencia:

$$D_d(e^{j\Omega}) = \left( \frac{1}{T_s} \sum_k \left| H\left(\frac{\frac{\Omega}{2\pi} + k}{T_s}\right) \right|^2 \right)^{-1} \quad (\text{A.3})$$

**Ejercicio A.1.** (Opcional). ¿Una transferencia  $H(f)$  como la mostrada en la figura A.1 corresponde al caso 1? ¿porqué? Observar que dicha transferencia es un pasabajo pero con ceros para algunas regiones de frecuencia en el rango  $[-T_s/2, T_s/2]$ .

Caso 2. El segundo caso es cuando la sumatoria del término de la derecha de la ecuación A.2 es cero para algunos valores de  $\Omega$ .

En ese caso se define,

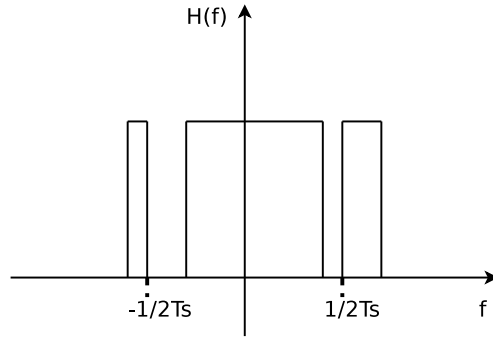


Figura A.1: Transferencia con ceros

$$D_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \left( \frac{1}{T_s} \sum_k \left| H\left(\frac{\Omega}{2\pi} + k\right) \right|^2 \right)^{-1} & \text{si } H\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cundo  $H\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right) > 0$  para algún  $\Omega$  entonces para esos  $\Omega$  la sumatoria de la derecha es positiva y el inverso está bien definido.

La señal discreta  $x_d[n]$  se pasa por el filtro  $D_d(e^{j\Omega})$ . La señal obtenida luego de este filtrado será

$$Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega})D_d(e^{j\Omega}) \quad (\text{A.4})$$

$$= \begin{cases} \frac{S_d(e^{j\Omega})D_d(e^{j\Omega})}{D_d(e^{j\Omega})} & \text{si } H\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$= \begin{cases} S_d(e^{j\Omega}) & \text{si } H\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

y luego se convierte a tiempo continuo se pasa por el filtro  $H(f)$ . La señal reconstruida será:

$$Y_1(f) = \begin{cases} S_d(e^{j2\pi f T_s})H(f) & \text{si } H(f) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$= R_{LP}(f) \quad (\text{A.8})$$

donde  $R_{LP}(f)$  es la T de F de la señal recibida del canal en equivalente pasabajo.  $\square$

## A.2. Ecualizadores fraccionales y Teorema de Euclídes

### A.2.1. El Teorema de Euclídes

Se recordará antes de proseguir algunas propiedades que se utilizarán en esta sección y el Teorema de Euclides que servirá para diseñar el ecualizador.

En primer lugar se recuerdan las siguientes propiedades del downsampling y el upsampling.

$$X(z)|_{\downarrow L} = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X(z^{1/L} e^{-j2\pi k/L}) \quad (\text{A.9})$$

$$X(z)|_{\uparrow L} = X(z^L) \quad (\text{A.10})$$

También se recuerda las descomposiciones polifásicas de un filtro  $H(z)$

$$H(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^M z^{-k} R_k(z^M) & \text{tipo 1} \\ \sum_{k=0}^M z^k E_k(z^M) & \text{tipo 2} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Por último enunciaremos el teorema de Euclides para polinomios, que se utilizará más adelante. Se enunciará para dos polinomios por simplicidad pero es sencillo generalizarlo y además se estudiará la demostración ya que es constructiva y de ella se puede construir la solución al problema de diseño del ecualizador que se verá más adelante.

**Teorema A.1** (Teorema de Euclides). *Se consideran dos polinomios de grado  $N_0$  y  $N_1$ :*

$$R_0(x) = \sum_{n=0}^{N_0} r_0[n]x^n, \quad R_1(x) = \sum_{n=0}^{N_1} r_1[n]x^n \quad (\text{A.12})$$

*Por hipótesis se asumirá que estos dos polinomios no tienen raíces comunes de grado  $> 0$ . Entonces existe un único par de polinomios*

$$E_0(x) = \sum_{n=0}^{N_1-1} e_0[n]x^n, \quad E_1(x) = \sum_{n=0}^{N_0-1} e_1[n]x^n \quad (\text{A.13})$$

*tales que,*

$$R_0(x)E_0(x) + R_1(x)E_1(x) = 1 \quad \forall x \quad (\text{A.14})$$

*Observar que los polinomios  $E_i(x)$  son de grado menor que el  $R_j(x)$ . Si se deja libre el grado de los polinomios y se permite que sean de grado superior se pueden encontrar infinitos que verifiquen la igualdad.*

*Prueba:*

*La ecuación de la tesis del Teorema se puede escribir como un conjunto de ecuaciones para cada grado del polinomio. Para el grado 0, esta ecuación debe ser igual a 1 y para todos los demás igual a 0.*

Las ecuaciones tendrán la forma

$$\begin{aligned}
 r_0[0]e_0[0] + r_1[0]e_1[0] &= 1, \text{ para grado } 0 \\
 r_0[1]e_0[0] + r_0[0]e_0[1] + r_1[1]e_1[0] + r_0[0]e_1[1] &= 0, \text{ para grado } 1 \\
 \sum_{n=0}^N e_0[n]r_0[N-n] + \sum_{n=0}^N e_1[n]r_1[N-n] &= 0, \text{ para grado } N > 0
 \end{aligned}
 \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} r_0[0] & 0 & \dots & 0 \\ r_0[1] & r_0[0] & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & r_0[N_0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0[0] \\ e_0[1] \\ \dots \\ e_0[N_0-1] \end{pmatrix} \\
 + &\begin{pmatrix} r_1[0] & 0 & \dots & 0 \\ r_1[1] & r_1[0] & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & r_1[N_1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1[0] \\ e_1[1] \\ \dots \\ e_1[N_1-1] \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{A.16}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}
 \tag{A.17}$$

$$\tag{A.18}$$

es decir que se puede escribir matricialmente como

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{R}_1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}
 \tag{A.19}$$

Esto se puede escribir también concatenando las matrices y los vectores de la forma:

$$(\mathbf{R}_0 \quad \mathbf{R}_1) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}
 \tag{A.20}$$

La matriz  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_0 \quad \mathbf{R}_1)$  es ahora una matriz cuadrada de dimensión  $N_0 + N_1$  y el vector  $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}$  es un vector de dimensión  $N_0 + N_1$ . Por lo tanto existirá un único  $\mathbf{e}$  solución de

$$\mathbf{R} \mathbf{e} = \mathbf{u}
 \tag{A.21}$$

si la matriz  $\mathbf{R}$  es invertible, es decir si es no singular. Si por absurdo se asume que efectivamente existe un vector  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{R} \mathbf{e} = \mathbf{0}$ . Por lo tanto, existirían  $E_0(x)$  y  $E_1(x)$  en las hipótesis del teorema tales queda

$$R_0(x)E_0(x) + R_1(x)E_1(x) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$R_0(x)E_0(x) = -R_1(x)E_1(x) \quad (\text{A.23})$$

Como  $R_0(x)$  y  $R_1(x)$  no tiene factores comunes, esto implica que  $E_1(x)$  debe contener todos los factores de  $R_0(x)$  lo cual es absurdo por la condición de los grados de ambos polinomios.

Algunas observaciones sobre el Teorema anterior. En primer lugar, qué sucede si los polinomios tienen factores comunes. Es decir, por ejemplo si  $R_0(x)$  y  $R_1(x)$  tiene factor común  $G(x)$ . Este factor será común a la suma de  $R_0(x)E_0(x) + R_1(x)E_1(x)$  y por lo tanto esta suma no podrá ser igual a 1. Por lo tanto, la condición equivale a decir que el máximo común divisor (mcd) de  $R_0(x)$  y  $R_1(x)$  debe ser 1. Si el  $mcd(R_0(x), R_1(x)) = G(x)$ , entonces el teorema se aplica pero para probar que existen los dos polinomios que verifican  $R_0(x)E_0(x) + R_1(x)E_1(x) = G(x)$ .

La última observación corresponde a qué sucede si se tienen más de dos polinomios. Se analizará el caso de 3 y la generalización del procedimiento sigue de este caso. Si se asume que los tres no tienen factores comunes pero que por ejemplo para dos de ellos se cumple que  $mcd(R_0(x), R_1(x)) = G(x)$ . Entonces, el teorema anterior dice que existen y son únicos dos polinomios que verifican  $R_0(x)E_0(x) + R_1(x)E_1(x) = G(x)$ . Al no existir factores comunes entre los tres polinomios entonces el  $mcd(G(x), R_2(x)) = 1$ . Por lo tanto el teorema anterior establece que  $G(x)A_0(x) + R_2(x)A_1(x) = 1$ . Sustituyendo se llega a que:  $R_0(x)E_0(x)A_0(x) + R_1(x)E_1(x)A_0(x) + R_2(x)A_1(x) = 1$ .

### A.2.2. Diseño de ecualizadores FSE con filtros FIR

En lo que sigue expresaremos el canal y el ecualizador por sus formas polifásicas.

$$H_L(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} R_k(z^L) \quad (\text{A.24})$$

$$Q_L(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^k E_k(z^L) \quad (\text{A.25})$$

**Teorema A.2.** Dado un canal FIR  $H_L(z) = \sum_{n=0}^N c_L[n]z^{-n}$ , existe un filtro FIR  $Q_L(z)$  tal que cumple:

$$V(z) = H_L(z)Q_L(z)|_{\downarrow L} = 1 \quad (\text{A.26})$$

si y solo si todos los componentes  $R_k(x)$  del filtro  $H_L(z)$  no tienen ningún factor común de la forma  $(1 - az^{-1})$  con  $a \neq 0$

*Prueba:*

El producto del canal y el ecualizador se puede escribir:

$$H_L(z)Q_L(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} R_k(z^L) \sum_{l=0}^{L-1} z^l E_l(z^L) \quad (\text{A.27})$$

$$= \sum_{m=-L+1}^{L-1} z^m A_m(z^L) \quad (\text{A.28})$$

donde la última sumatoria surge de ordenar los productos de las otras dos adecuadamente. Por otra parte se puede observar a partir de esta última expresión que:

$$H_L(z)Q_L(z)|_{\downarrow L} = \sum_{m=-L+1}^{L-1} z^m A_m(z^L)|_{\downarrow L} \quad (\text{A.29})$$

$$= A_0(z) \quad (\text{A.30})$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} R_l(z)E_l(z) \quad (\text{A.31})$$

Si los  $R_k(z)$  no tienen factores comunes como los referidos en la hipótesis entonces por el Teorema de Euclides existen un conjunto único de  $E_k(z)$  que verifican que

$$\sum_{l=0}^{L-1} R_l(z)E_l(z) = 1 \quad (\text{A.32})$$

$$H_L(z)Q_L(z)|_{\downarrow L} = 1 \quad (\text{A.33})$$

lo cual es la tesis del Teorema. Podría suceder que los polinomios  $E_k(z)$  tuvieran un factor común de la forma  $z^{-J}$ , pero esto puede solucionarse encontrando un conjunto de polinomios con un factor común  $z^J$ .

**Ejemplo A.1.** Sea  $L=2$  y el canal

$$H_L(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3} + z^{-5} \quad (\text{A.34})$$

Por lo tanto,

$$R_0(z) = 1 + 4z^{-1} \quad , \quad R_1(z) = 2 + z^{-1} + z^{-2} \quad (\text{A.35})$$

la ecuación matricial correspondiente al teorema de Euclides sería

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0(0) \\ e_0(1) \\ e_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

El determinante de la matriz vale 29 y alcanza con encontrar el valor de la primera fila de la inversa que es,

$$\frac{1}{29} \begin{pmatrix} -3 & \dots & \dots \\ -4 & \dots & \dots \\ 16 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$E_0(z) = \frac{-3 - 4z^{-1}}{29} \quad , \quad E_1(z) = \frac{16}{29} \quad (\text{A.37})$$



Por lo tanto, el ecualizador será Por lo tanto,

$$Q_2(z) = E_0(z^2) + zE_1(z^2) = \frac{16z - 3 - 4z^{-2}}{29} \quad (\text{A.38})$$

**Ejercicio A.2.** (Opcional). Se considera un transmisor canal y receptor que trabaja con BPSK, a dos muestras por símbolo y donde el canal tiene una transferencia :  $H_L(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3} + z^{-5}$

a) Utilizar como ecualizador el filtro FIR que se diseñó en el ejemplo anterior. Implementar el sistema Tx-Canal-Rx en GnuRadio utilizando el archivo que se adjunta a estas notas para este ejercicio. Verificar primero la constelación y la respuesta en frecuencia solo con el canal y luego con el canal y el ecualizador.

b) Agregar al modelo anterior en GnuRadio el pulso de Tx y Rx RRC. Con estos pulsos, el canal y el ecualizador, ¿se logra ecualizar correctamente el sistema? ¿porqué?

c) Considere ahora el sistema con los pulsos RRC de Tx y Rx y un canal con transferencia  $C(z) = 1 - \alpha z$ . Los pulsos RRC modelaran con un filtro FIR en el Companion y para simplificar las operaciones se utilizarán solo tres taps. Los tres taps de un RRC son aproximadamente 0,5, 1, 0,5 multiplicados una constante de ganancia, que se considerará que vale 0.25. Diseñe un ecualizador para el conjunto pulso Rx, Canal, pulso Tx. Implemente el sistema en el Companion y verifique que ecualiza correctamente.



# Bibliografía

- [1] Automatic Equalization for Digital Communications, R.W. Lucky, The Bell System Technical Journal, 1965.
- [2] Signal Processing and optimization for transceiver systems, P. P. VAIDYANATHAN, SEE-MAY PHOONG, YUAN-PEI LIN, Cambridge University Press , 2010
- [3] The Complex Gradient Operator and the CR-Calculus, Ken Kreutz-Delgado, <http://arxiv.org/pdf/0906.4835.pdf>, June 25, 2009.
- [4] Robust identification of a nonminimum phase system: Blind adjustment of a linear equalizer in data communication, A. Benveniste, M. Goursat, and G. Ruget, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-25, no. 3, pp. 385-399, June 1980
- [5] New Criteria for Blind Deconvolution of Nonminimum Phase Systems (Channels), O. Shalvi and E.Weinstein, IEEE Transactions Information Theory, vol. 36, pp. 312-321, March 1990
- [6] Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communications Systems, D. N. Godard, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-28, pp. 1867-1875, Nov. 1980.
- [7] Digital Communication, Barry, John R., Lee, Edward A., Messerschmitt, David G., Originally published under Leww,E.A.;Messerschmitt,D.G., 3rd ed. 2003, XVII, 838 p. In 2 volumes,