



UNIVERSIDAD DE JAÉN

TÍTULO DE EXPERTO UNIVERSITARIO
EN EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DE LA INFORMACIÓN GEOGRÁFICA
ENERO – JUNIO 2010

Módulo 9 Control de Calidad en Procesos Fotogramétricos (Orientación)

Prof. Jorge Delgado García (Universidad de Jaén)
Prof. José Luis Pérez García (Universidad de Jaén)

Contenidos

9.1 Introducción.....	2
9.2 Calidad en la Orientación mediante transformación lineal directa.....	2
9.3 Calidad en la Orientación mediante resección espacial.....	4
9.4 Calidad en los procesos de orientación relativa.....	5
9.5 Calidad en los procesos de orientación absoluta.....	9
9.6 Evaluación del ajuste del bloque fotogramétrico.....	10
9.6.1 Planificación del ajuste del bloque mediante simulación.....	11
9.6.2 Evaluación cualitativa.....	11
9.6.3 Evaluación estadística.....	12
9.6.3.1 Precisión.....	13
9.6.3.2 Exactitud.....	13
9.6.3.3 Fiabilidad.....	14
9.6.3.4 Procedimientos para el análisis de resultados.....	15

9.1 Introducción

La reconstrucción de objetos 3D a partir de una o más imágenes es una de las principales tareas de la Fotogrametría. La reconstrucción implica la determinación de la forma de los objetos tridimensionales, en función de la geometría de su superficie y su posición y orientación, de acuerdo con un sistema de coordenadas definido por el usuario. Dicha reconstrucción lleva consigo una primera tarea de interpretación de las imágenes que podrá ser realizada de forma automática (mediante procedimientos de correspondencia de imágenes) o de forma manual (a través de un operador). Para la reconstrucción es fundamental la tarea de orientación, que en realidad lo que pone de manifiesto es una reconstrucción de la escena en el momento de la toma y que es el paso previo para la obtención de la información tridimensional de la escena, en este caso, se considera a la cámara como un elemento más de la escena a reconstruir y, en dicha aproximación, es necesario el establecer la posición y orientación de la cámara en el momento de la captura de acuerdo con el sistema de coordenadas terreno predeterminado y fijado por el usuario.

Existe una amplia gama de métodos que permiten la obtención de los parámetros de orientación y con ello el reconstruir la posición deseada de la cámara. Entre ellos y, para el análisis que se plantea en este documento se van a considerar la calidad implícita a los siguientes métodos básicos:

1. Transformación lineal directa (DLT)
2. Resección espacial
3. Orientación relativa y absoluta
4. Ajuste de bloques

9.2 Calidad en la Orientación mediante transformación lineal directa.

La precisión teórica de los parámetros de orientación para un caso convencional se establece a partir del esquema mostrado en la figura 1 con los 8 puntos que definen la geometría del bloque del terreno. El bloque es parametrizado en función de la altura Z_0 del centro de proyección sobre el centro del bloque y los dos factores h y w que definen la altura y la anchura del bloque.

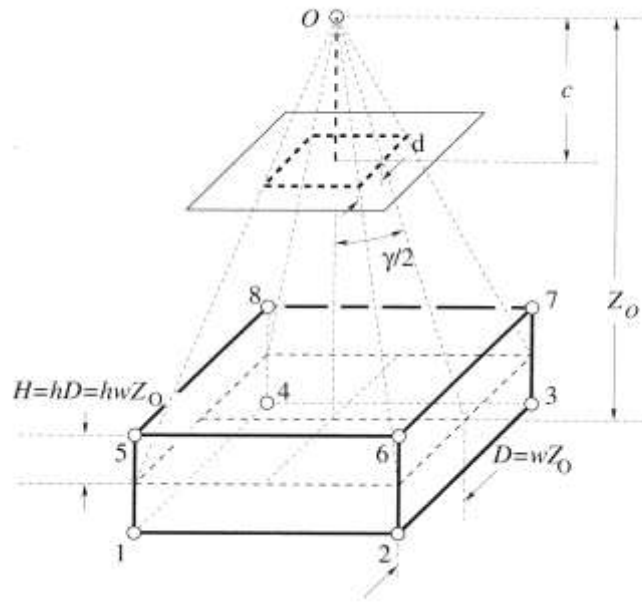


Figura 1. Configuración de 8 puntos para la orientación de una cámara

La altura del bloque del centro de proyección con respecto al centro del bloque es igual a Z_0 , la distancia principal de la cámara es c , y la anchura del bloque es $2D$, siendo $D=wZ_0$, que está relacionado al ángulo γ , bajo el cual el bloque es visible, definido por $D=Z_0 \tan(\gamma/2)$. La altura del bloque es $2H=2hD=2hwZ_0$.

Es importante tener en cuenta que $hw < 1$, ya que de forma contraria el centro de proyección estaría situado dentro del bloque. Las coordenadas imagen son medidas con una desviación típica de $\sigma_0 = \sigma_x = \sigma_y$.

Las desviaciones estándar teóricas para la orientación externa de este método vienen dada por la diferencia de escala m y el factor s .

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} &= \frac{\sqrt{2} |1 - (hw)^2|}{4 hw^2} \sqrt{\frac{(1 + (hw)^2)^2 + 8(hw)^2}{(1 + (hw)^2)^2 + 4(hw)^2}} \frac{Z_0}{c} \sigma_0 \\ \sigma_{z_0} &= \frac{1 |1 - (hw)^2|}{4 hw^2} \sqrt{\frac{1 + (hw)^2}{hw}} \frac{Z_0}{c} \sigma_0 \\ \sigma_\omega = \sigma_\phi &= \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(1 - (hw)^2)^2}{\sqrt{(1 + (hw)^2)^2 + 4(hw)^2}} \frac{1}{c} \sigma_0 \\ \sigma_\kappa = \frac{1}{2} \sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_s &= \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1 |1 - (hw)^2|}{w \sqrt{1 + (hw)^2}} \frac{1}{c} \sigma_0 \end{aligned}$$

Las expresiones para otros parámetros de la orientación interna no son consideradas dado que el nivel de error que introducen es comparativamente reducido en el caso de contar con imágenes de cámaras métricas o semimétricas. La altura de vuelo $h > 0$ del bloque necesita que no sea nula para que el bloque pueda ser resuelto, dando lugar a la configuración crítica en la que todos los puntos están situados en la misma cota. La precisión de las coordenadas de los puntos del centro de proyección se muestra en la figura 2. Evidentemente, la precisión de la coordenada Z_0 es siempre peor que la precisión de las coordenadas X_0 e Y_0 .

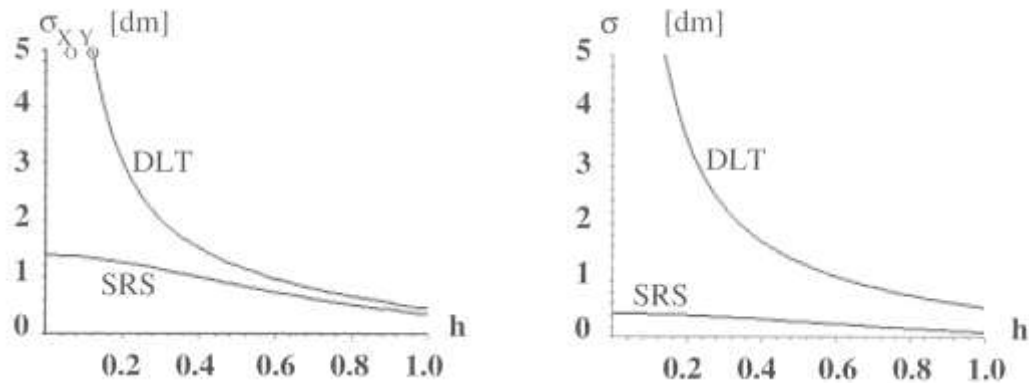


Figura 2. Precisión teórica del centro de proyección de la orientación de una cámara a partir de la observación de las 8 esquinas del bloque. En este ejemplo se considera una escala de imagen 1:10000, un valor de constante de la cámara de 0.15m, un valor de $\sigma_0=10 \mu\text{m}$, con un valor de la mitad de la anchura del bloque de $d=9.2\text{cm}$. Izq: Precisión en x,y; Dcha: Precisión en z. Cálculos realizados considerando DLT (transformación lineal directa) y SRS (resección espacial).

9.3 Calidad en la Orientación mediante resección espacial.

La precisión teórica de la orientación externa de una toma vertical considerado un bloque definido por 8 puntos (figura 1) viene dada por las expresiones siguientes, en las que para simplificación se ha considerado que todos los puntos están situados en un plano, así la altura del bloque se considera que es igual a cero. Esto equivale a medir un punto doble en cada una de las esquinas del bloque.

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} &= \frac{\sqrt{2} Z_0}{4 c} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\alpha}{2}}} \sigma_0 \\ \sigma_{z_0} &= \frac{Z_0}{4d} \sigma_0 \\ \sigma_{\omega} = \sigma_{\phi} &= \frac{\sqrt{2} c}{4 d^2} \sigma_0 \\ \sigma_{\kappa} &= \frac{1}{4d} \sigma_0 \end{aligned}$$

Las correlaciones entre la posición lateral (X_0, Y_0) y los ángulos ω y ϕ vienen definidos por:

$$\rho_{x_0\phi} = -\rho_{y_0\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sen}^4 \frac{\alpha}{2}}}$$

Para los ángulos de vista de $\alpha=90^\circ$, las correlaciones toman valores cercanos a 0.9, mientras que para los ángulos de vista de 45° toman valores del orden de 0.99. Por otro lado, la determinación de la posición lateral de la cámara determinada a través de la resección espacial es menos precisa que la distancia entre la cámara y el objeto.

Si se compara la precisión alcanzada por DLT, los mejores resultados alcanzados por la resección espacial son evidentes. Así, para alcanzar la misma exactitud en altura, es necesario considerar toda la profundidad utilizando un cubo de lado Z_0 . Para obtener la misma precisión posicional, $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0}$ es necesario tener un objeto espacial de una altura de al menos $>0.6 Z_0$ cuando se utiliza DLT.

En el caso de la resección espacial, teniendo en cuenta el número de puntos que intervienen en la estimación de los parámetros de orientación espacial es fundamental el garantizar que no se introduzcan en la medida errores groseros. Para garantizar eso es aconsejable el utilizar aproximaciones iniciales para la selección de una buena tripleta de puntos a partir de los que se realiza la orientación. Para ello se suele utilizar el procedimiento conocido como RANSAC (Random Sample Consensus) realizando la selección de tres puntos, calculando los parámetros de orientación y comprobando los resultados con otros puntos disponibles.

9.4 Calidad en los procesos de orientación relativa

La orientación relativa tiene como resultado la obtención de los parámetros de orientación de una imagen del par con respecto a la otra, considerando una determinada longitud de la base. Así todos los rayos correspondientes intersectan en un espacio 3D, dando lugar a la formación del modelo fotogramétrico de acuerdo con una relación proyectiva o similar con el objeto verdadero en un sistema de coordenadas de referencia. Una vez realizada dicha orientación el objeto podrá ser observado estereoscópicamente.

La determinación de la orientación relativa de las dos imágenes se basa en la ecuación de coplanaridad a diferencia de los métodos analizados con anterioridad. Los resultados de la orientación relativa pueden ser ambiguos o indefinidos si se dan las condiciones de configuración crítica, y cerca de esta situación los resultados se convierten en inestables.

Una vez que la orientación relativa está determinada se pueden obtener las matrices de proyección que deben ser consistentes con la orientación relativa establecida. Si no se utiliza información 3D estas matrices de proyección no son únicas, aunque se pueden utilizar para determinar coordenadas 3D (coordenadas modelo) y para establecer puntos homólogos y líneas rectas.

La precisión y la fiabilidad de la orientación relativa y especialmente la precisión de los puntos 3D obtenidos puede ser establecida. En todos los casos se parte de la medida (manual o automática) de un conjunto de N parejas $[x'_n, y'_n]$ y $[x''_n, y''_n]$. Para optimizar la solución de esta orientación es aconsejable el establecer la precisión de estas medidas, que se representa a través de las matrices de covarianza $C_{x'_n, x'_n}$ y $C_{x''_n, x''_n}$.

La calidad de la orientación relativa se suele establecer para las configuraciones estándar, en estas configuraciones se establecen la precisión teórica y la fiabilidad, especialmente el límite inferior para los errores detectables. El esquema más habitual es considerar un modelo estereoscópico con un solape longitudinal del 60%, con un fotograma aéreo de tamaño $23\text{cm} \times 23\text{cm}$ y con una base aérea $b_x = 0.4 \times 23\text{cm} = 9.2\text{cm}$ a escala imagen. En este esquema teórico (figura 3) se plantea una distribución de puntos en un área rectangular de tamaño $b \times 2d$, con un valor de $p_x = b = b_x$ para todos los puntos. La distancia principal es igual a c . La longitud de la base en espacio terreno es $B_x = b_x \times S$, donde $S = H_g/c$ es la escala de las imágenes y H_g es la altura de vuelo con respecto al terreno.

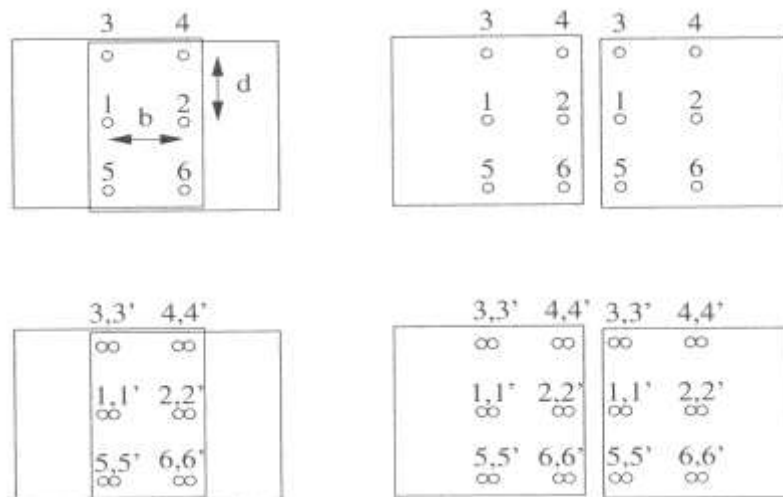


Figura 3. Orientación relativa clásica de dos imágenes con puntos en las posiciones de von Gruber. Sup: puntos individuales; Inf.: puntos dobles; Izq.: modelos estereoscópicos; Dcha.: imágenes separadas.

Se parte del hecho de que el paralaje se mide en los 6 puntos correspondientes. Los puntos se distribuyen de acuerdo con la distribución propuesta por von Gruber (1938). Sus coordenadas se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. Coordenadas de los puntos de von Gruber

Punto	x'	y'	x''	y''
1	0	0	-b	0
2	B	0	0	0
3	0	d	-b	d
4	B	d	0	d
5	0	-d	-b	-d
6	B	-d	0	-d

Si los paralajes se miden con la misma precisión y se les da un valor de 1, se puede considerar que $\sigma_0 = \sigma_{py} = \sqrt{2}\sigma_y$, se obtiene la siguiente matriz de coeficientes.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{b}{B_x} & 0 & -c & 0 & 0 \\ \frac{b}{B_x} & 0 & -c & 0 & b \\ \frac{b}{B_x} & -\frac{bd}{B_x c} & -\frac{d^2}{c} - c & 0 & 0 \\ \frac{b}{B_x} & -\frac{bd}{B_x c} & -\frac{d^2}{c} - c & \frac{bd}{c} & b \\ \frac{b}{B_x} & \frac{bd}{B_x c} & -\frac{d^2}{c} - c & 0 & 0 \\ \frac{b}{B_x} & \frac{bd}{B_x c} & -\frac{d^2}{c} - c & -\frac{bd}{c} & b \end{bmatrix}$$

Siendo la matriz de ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}
 A^t A &= \\
 &= \begin{bmatrix} 6 \frac{b^2}{B_x^2} & 0 & -2 \frac{b(3c^2 + 2d^2)}{B_x c} & 0 & 3 \frac{b^2}{B_x} \\ 0 & 4 \frac{b^2 d^2}{B_x^2 c^2} & 0 & -2 \frac{b^2 d^2}{B_x^2 c^2} & 0 \\ -2 \frac{b(3c^2 + 2d^2)}{B_x c} & 0 & 2 \frac{3c^4 + 2d^4 + 4d^2 c^2}{c^2} & 0 & -\frac{b(3c^2 + 2d^2)}{c} \\ 0 & -2 \frac{b^2 d^2}{B_x^2 c^2} & 0 & 2 \frac{b^2 d^2}{c^2} & 0 \\ 3 \frac{b^2}{B_x} & 0 & -\frac{b(3c^2 + 2d^2)}{c} & 0 & 3b^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Siendo la matriz de covarianza de los parámetros:

$$\begin{aligned}
 C_{\hat{p}\hat{p}} &= \sigma_0^2 (A^t A)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \frac{B_x^2 (9c^4 + 8d^4 + 12d^2 c^2)}{b^2 d^4} & 0 & \frac{1}{4} \frac{(3c^2 + 2d^2) B_x c}{b d^4} & 0 & -\frac{1}{3} \frac{B_x}{b^2} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{B_x^2 c^2}{b^2 d^2} & 0 & \frac{1}{2} \frac{B_x^2 c^2}{b^2 d^2} & 0 \\ \frac{1}{4} \frac{(3c^2 + 2d^2) B_x c}{b d^4} & 0 & \frac{3}{4} \frac{c^2}{d^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{B_x^2 c^2}{b^2 d^2} & 0 & \frac{c^2}{b^2 d^2} & 0 \\ -\frac{1}{3} \frac{B_x}{b^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Por último, las desviaciones típicas para los parámetros de orientación se obtienen utilizando las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{B_Y} &= \frac{H_g}{c} \frac{\sqrt{9c^4 + 8d^4 + 12d^2 c^2}}{d^2} \sigma_{y'} \\
 \sigma_{B_Z} &= \frac{H_g}{c} \frac{c}{d} \sigma_{y'} = \frac{H_g}{d} \sigma_{y'} \\
 \sigma_{\omega} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{c}{d^2} \sigma_{y'} \\
 \sigma_{\phi} &= \sqrt{2} \frac{c}{b d} \sigma_{y'} \\
 \sigma_{\kappa} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{b} \sigma_{y'}
 \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores se puede deducir que:

- 1) Las desviaciones típicas dependen directamente de la precisión de medida $\sigma_{y'}$.
- 2) La incertidumbre de las componentes de la base B_Y y B_Z , es mayor cuando el denominador de la escala es mayor.
- 3) La precisión de los ángulos ω y ϕ depende de una forma muy importante del área rectangular del modelo.

- 4) Si $d = b$, y el área completa del modelo es considerado, todas las desviaciones estándar disminuyen con la longitud de la base b .

Para analizar la fiabilidad, especialmente en la detección de los errores groseros en las observaciones, es necesaria la matriz de covarianza de los residuos $\hat{v} \doteq v_{p_y}$, la cual cuando se miden 6 puntos es independientemente de la distancia principal c , la base b y la altura del área del modelo (2d).

$$C_{\hat{v}\hat{v}} = C_{\hat{v}\hat{v}}(6) = \sigma_0^2(I - A(A^t A)^{-1}A^t) =$$

$$= \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

La comprobación de las observaciones p_y pueden ser caracterizados utilizando el valor de la redundancia r_i , que son los elementos de la diagonal $C_{\hat{v}\hat{v}}$, excepto para el factor σ_0^2 . Para los 6 puntos:

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{3} \quad r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = \frac{1}{12}$$

Como $\Delta\hat{v}_i = -r_i\Delta l_i$, después del ajuste sólo una pequeña fracción de los errores originales Δl_i en los paralajes residuales puede ser detectada. El tamaño mínimo $\nabla_0 l_i$ de los errores detectables, $\delta_0(\sqrt{1/r_i})\sigma_{p_y}$ con $\delta_0=4.13$.

$$\nabla_0 l_1 = \nabla_0 l_2 = 7.2 \sigma_{p_y} \quad \nabla_0 l_3 = \nabla_0 l_4 = \nabla_0 l_5 = \nabla_0 l_6 = 14.3 \sigma_{p_y}$$

Así los errores groseros en los paralajes y necesitan ser muy grandes para que puedan ser detectados, cuando se comparan con la desviación típica σ_{p_y} de los paralajes.

La precisión de los parámetros de orientación puede ser mejorada midiendo parejas de puntos en cada una de las posiciones, siempre que los mismos estén situados próximos. Cuando se mide el doble de puntos la matriz de diseño tendría la estructura siguiente:

$$C_{\hat{v}\hat{v}}(12) = \sigma_0^2 \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} [2A^t A]^{-1} [A^t A] \right\}$$

a partir de la que se obtienen los siguientes valores de redundancia:

$$r_n = \frac{2}{3} \text{ para } n=1,1',2,2' \quad r_n = \frac{7}{12} \text{ para } n=3,3',4,4',5,5',6,6'$$

Así la medida del doble de puntos da lugar a una situación mucho más propicia, así se reduce el tamaño de los errores groseros detectados a la mitad. Así el tamaño mínimo de los errores detectables en todos los casos es de $5.4 \sigma_{p_y}$.

Así cuando se mide el doble de puntos la precisión de los parámetros de orientación se incrementa en un factor de $\sqrt{2}$.

9.5 Calidad en los procesos de orientación absoluta

La solución fotogramétrica puede ser utilizada para determinar la precisión teórica de los puntos 3D obtenidos. Esta precisión depende de la incertidumbre de la orientación relativa y de la incertidumbre de los puntos correspondientes medidos.

Para simplificar, la incertidumbre de la orientación relativa puede ser considerada como despreciable. Esto es razonable, puesto que la orientación relativa es mucho más precisa que las propias medidas en los puntos correspondientes, así la misma es determinada a partir de un número mucho mayor de puntos.

La precisión de las coordenadas de las imágenes y el paralaje x se asume que $\sigma_{x'} = \sigma_{y'}$ y σ_{p_x} . La precisión planimétrica de X e Y se obtienen de una forma directa a partir de:

$$\sigma_X = \frac{Z}{c} \sigma_{x'} \quad \sigma_Y = \frac{\sqrt{2} Z}{2 c} \sigma_{y'}$$

La precisión en cota puede ser determinada a partir de $Z p_x = cB$, siendo $dZ p_x + Z dp_x = 0$. Así la precisión relativa en Z es idéntica a la precisión relativa en el paralaje x . Así se suele utilizar la expresión siguiente:

$$\sigma_Z = \frac{cB}{p_x^2} \sigma_{p_x} = \frac{Z^2}{cB} \sigma_{p_x} = \frac{H_g}{c} \frac{1}{B/H_g} \sigma_{p_x}$$

Así la precisión de Z es:

- Inversamente proporcional al cuadrado del paralaje x para una determinada geometría de las imágenes.
- Proporcional al cuadrado de Z^2 de la distancia de la línea base.
- Proporcional al factor de escala e inversamente proporcional a la relación base/altura.

Así por ejemplo, se puede calcular la precisión teórica de las coordenadas 3D obtenidas a partir de un modelo estereoscópico de fotogramas 23cm x 23 cm tomado con un solape longitudinal del 60%. Se considera una precisión en la medida de las coordenadas de la imagen igual a $7 \mu\text{m}$ ($\sigma_{x'} = \sigma_{y'}$) y en la medida del paralaje x (σ_{p_x}) igual a $10 \mu\text{m}$.

Si el modelo tiene un solape del 60%, la base será igual a $23 \text{ cm} \times 0.4 = 92\text{mm}$, y considerando que $b \approx p_x$ se obtiene:

$$\sigma_Z = \frac{Z}{b} \sigma_{p_x} = \frac{Z}{92 \text{ mm}} 10 \mu\text{m} \approx \frac{1}{10000} Z$$

Por otro lado, las expresiones anteriores plantean que si el vuelo ha sido realizado con una cámara de distancia focal de 153 mm y con una escala $1/10000$, se obtenga:

$$\sigma_X = \frac{Z}{c} \sigma_{x'} = 10000 \sigma_{x'} = 7 \text{ cm}$$

$$\sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Z}{c} \sigma_{y'} \approx 7000 \sigma_{y'} = 5 \text{ cm}$$

La orientación absoluta consiste fundamentalmente de una transformación de similitud tridimensional. Si el centro de coordenadas se escoge en el centroide, las coordenadas reducidas \bar{x}_n son referidas al mismo. Si se considera que los puntos tienen un peso en el sistema igual a $p_n = \sigma_0^2 / \sigma_n^2$, así $D(x_n) = \sigma_n^2 I$. Considerando todas las sumas desde $n=1$ a N , se pueden obtener las siguientes desviaciones típicas:

$$\sigma_{T_x} = \sigma_{T_y} = \sigma_{T_z} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\Sigma p_n}}$$

Y para la escala:

$$\sigma_\lambda = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2 + \bar{Z}_n^2)}}$$

Y los tres ángulos:

$$\sigma_\omega = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\Sigma p_n (\bar{Y}_n^2 + \bar{Z}_n^2)}} \quad \sigma_\phi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Z}_n^2)}} \quad \sigma_\kappa = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2)}}$$

Si el sistema de coordenadas se elige paralelo a los 3 ejes principales de coordenadas entonces todas las correlaciones son cero, al ser los parámetros de las incógnitas estadísticamente independientes. La fiabilidad teórica depende de la redundancia, los valores de la redundancia para las coordenadas son:

$$r_{X_n} = 1 - \frac{p_n}{\Sigma p_n} - \frac{p_n \bar{X}_n^2}{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2 + \bar{Z}_n^2)} - \frac{p_n (\bar{Y}_n^2 + \bar{Z}_n^2)}{\Sigma p_n (\bar{Y}_n^2 + \bar{Z}_n^2)}$$

$$r_{Y_n} = 1 - \frac{p_n}{\Sigma p_n} - \frac{p_n \bar{Y}_n^2}{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2 + \bar{Z}_n^2)} - \frac{p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Z}_n^2)}{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Z}_n^2)}$$

$$r_{Z_n} = 1 - \frac{p_n}{\Sigma p_n} - \frac{p_n \bar{Z}_n^2}{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2 + \bar{Z}_n^2)} - \frac{p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2)}{\Sigma p_n (\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2)}$$

Que puede ser utilizada para la detección de errores. Como la comprobación de las coordenadas crece con el incremento de la redundancia, los puntos situados en el centro de la nube de puntos podrían ser comprobados de una forma más sencilla que los puntos en el borde.

9.6 Evaluación del ajuste del bloque fotogramétrico

Después de realizar el ajuste del bloque fotogramétrico con el objeto de obtener los parámetros de orientación externa de las imágenes, es necesario realizar la evaluación para establecer si los resultados obtenidos se corresponden con las especificaciones del proyecto y que los resultados son correctos –es decir, que no están afectados por errores en la medida o en la resolución que afecten a la calidad de la orientación y que puedan propagarse en posteriores procesos de captura de información a partir de las imágenes orientadas-. Aunque sea curioso el planteamiento, la evaluación debe comenzar en la propia fase de planificación del proyecto, a través de la verificación de la geometría del bloque y los resultados predecibles mediante la aplicación de técnicas de simulación de errores o, bien, a través de la experiencia previa acumulada en otros proyectos similares.

El primer paso a llevar a cabo es una evaluación de tipo cualitativo, en la que el operador examina las representaciones gráficas de los informes del ajuste para intentar determinar las tendencias generales que marcan la calidad del ajuste y detectar errores

groseros. En una segunda etapa, se desarrollan diferentes análisis estadísticos para poder detectar errores en todas las fases de la resolución (medida de los puntos, resolución de los sistemas de ecuaciones, etc.) y cuantificar la calidad del ajuste. Para ello se emplean métodos de estimación robusta, como los ajustes mínimos cuadráticos en iteraciones con pesos variables, estimación L1, estimación robusta basada en la mediana, entre otros.

9.6.1 Planificación del ajuste del bloque mediante simulación

Las características del ajuste del bloque son determinadas por la geometría de las imágenes, el número y distribución de los puntos de paso/enlace y de apoyo, y la calidad de la información adicional relacionada con la navegación. En la mayor parte de los proyectos, las líneas de vuelo se realizan de acuerdo con un patrón regular y los parámetros de vuelo se eligen de acuerdo con la experiencia previa que permite alcanzar los resultados deseados. Sin embargo, para proyectos nuevos o casos en los que la estructura de distribución de la pasada es irregular, es aconsejable el empleo de sistema de simulaciones de los bloques como paso previo a la tarea de captura de las imágenes y comprobar que el proyecto alcanza las especificaciones planteadas y, en caso contrario, introducir los cambios oportunos en el diseño del mismo.

El procedimiento de la simulación es posible por el hecho de que cualquier error de medida en las observaciones individuales tiene un efecto muy pequeño frente a la propia geometría del bloque, que determina la precisión y la fiabilidad del bloque. Así es posible el generar observaciones simuladas a partir de la geometría nominal de las imágenes y utilizar las mismas para predecir las características del ajuste final del bloque.

Un ajuste de bloque a partir de una simulación requiere sólo una iteración de la solución, puesto que las aproximaciones iniciales son exactas. Sólo puede formarse la matriz de coeficientes de las ecuaciones normales, de forma que puede ser obtenido la propagación de los errores y las desviaciones típicas de los parámetros y las correlaciones analizadas de la misma forma que si se tratara de una solución real. Esto permite la detección y la corrección de cualquier problema relacionado con las condiciones geométricas del diseño del bloque, que pueden ser solventados introduciendo puntos de control o paso/enlace adicionales o modificando la disposición de las líneas de vuelo.

9.6.2 Evaluación cualitativa

El objetivo de la evaluación cualitativa es permitir al operador el tener una primera visión general de las propiedades del bloque y realizar un primer diagnóstico de los problemas del mismo. Es complicado el detectar tendencias o errores observando listados de varias páginas de informes, por lo que en la mayor parte de los casos se utilizan representaciones gráficas de los resultados de la solución.

Los gráficos más empleados para la evaluación cualitativa de los resultados de un ajuste del bloque son los gráficos de residuos de imagen (figura 4). Los tamaños de los vectores que representan los residuos suelen ser exagerados de forma que se puedan observar mejor los errores y sus tendencias. Los residuos de las imágenes deben tener distribuciones de acuerdo con direcciones aleatorias y tener tamaños equivalentes. Si todos los residuos apuntan en la misma dirección (bien de forma paralela o de forma radial con respecto a la imagen) indican la presencia de efectos sistemáticos. Estos efectos pueden indicar errores no corregidos, como, por ejemplo, los relacionados con la refracción atmosférica, o que un determinado parámetro de la imagen ha recibido un peso demasiado elevado lo que ha impedido su ajuste correcto. Un residuo que es mayor que sus vecinos o puntos que presentan una dirección opuesta a sus vecinos pone de manifiesto un error de medida en el punto. No

obstante, es necesario tener en cuenta que no todos los errores de medida son evidentes en dichos gráficos, ya que dependen mucho del número de puntos medidos, del número de medidas en cada uno de los puntos y de la propia distribución espacial de los puntos, afectando también otros factores como la geometría de las imágenes y el tamaño y la dirección del error.

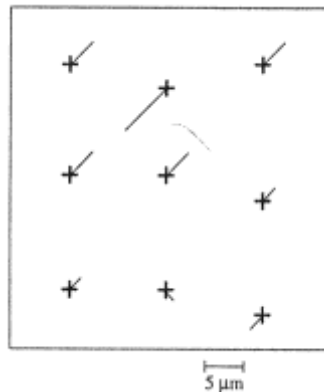


Figura 4. Gráfico de residuos de la imagen

Si existe un número suficiente de puntos de comprobación, se suele emplear un gráfico de errores en los puntos de comprobación (figura 5) que puede poner de manifiesto la deformación del bloque e indicar cualquier problema con las coordenadas de los puntos. De nuevo, los errores deberían estar aleatoriamente distribuidos y tener tamaños equivalentes.

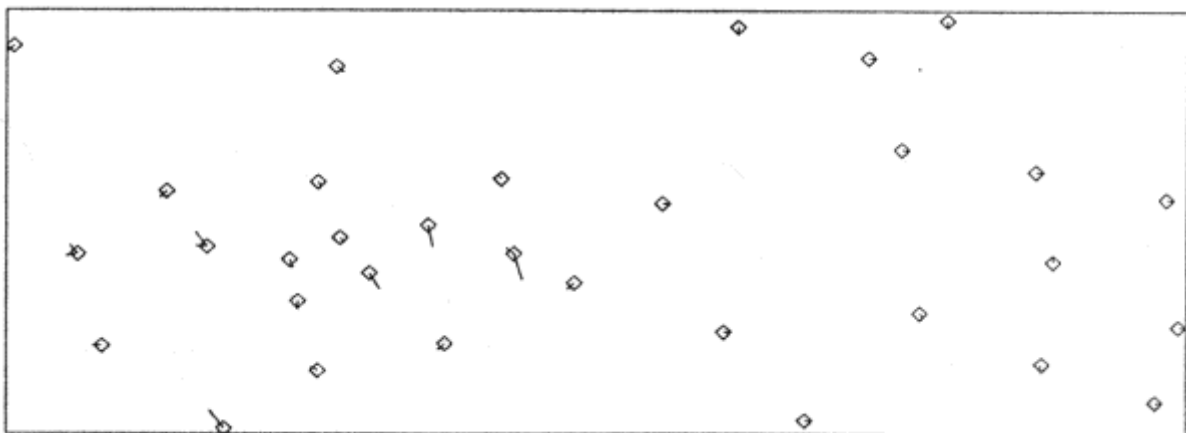


Figura 5. Gráfico de errores en los puntos de comprobación a lo largo de una pasada

La representación de la precisión calculada de los puntos en el bloque también es de gran utilidad. La precisión debe ser consistente en todo el bloque: cualquier tipo de variación puede indicar futuros problemas en la medida de puntos en dichas zonas.

9.6.3 Evaluación estadística

Como cualquier otro procedimiento de resolución por mínimos cuadrados, la resolución del ajuste de un bloque puede ser evaluado mediante un procedimiento estadístico. En esta evaluación deben ser considerados tres aspectos diferentes, la precisión, la exactitud y la fiabilidad, empleando en cada caso, los estadísticos oportunos garantizando que la solución es la correcta.

9.6.3.1 Precisión

La precisión se evalúa a través del examen de las covarianzas de los parámetros. La varianza de un parámetro es derivada de la variabilidad de su valor, así un parámetro con una pequeña varianza será conocido dentro de unos límites reducidos, un parámetro con una gran varianza no estará bien determinado por la resolución al tener unos límites excesivamente amplios que nos impiden conocer el valor. Los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza son las varianzas de los parámetros mientras que los elementos que están fuera de la diagonal ponen de manifiesto las covarianzas entre los parámetros. Así, por ejemplo, la matriz de covarianza para las coordenadas X, Y, Z de un punto puede ser:

$$\Sigma_j = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.690 & 0.728 & 1.638 \\ 0.728 & 1.960 & 2.058 \\ 1.638 & 2.058 & 4.41 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se puede observar como la varianza de las coordenadas X e Y son de 1.690 y 1.960 m, respectivamente, mientras que la varianza de la coordenadas Z es de 4.41 m. Habitualmente se obtiene la matriz de desviaciones típicas de la correlación, la cual se obtiene mediante el cálculo de las desviaciones típicas de las varianzas de los parámetros (la raíz cuadrada de los términos de la diagonal principal) y de los coeficientes de correlación del resto de la matriz mediante la expresión:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

En esta matriz la presencia de coeficientes de correlación elevados (los elementos fuera de la matriz) pone de manifiesto que la solución no ha sido bien determinada geoméricamente o que la solución está sobreparametrizada. En el caso de la matriz anterior, la matriz de las desviaciones típicas de correlación sería:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & \rho_{XY} & \rho_{XZ} \\ \rho_{YX} & \sigma_Y & \rho_{YZ} \\ \rho_{ZX} & \rho_{ZY} & \sigma_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 1.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 2.1 \end{bmatrix}$$

9.6.3.2 Exactitud

Un requerimiento fundamental para un ajuste de un bloque es que sea exacto, es decir, que los resultados del ajuste del bloque registren la realidad del bloque ajustado. La exactitud no puede ser determinada mediante el análisis de la solución, puesto que una solución puede ser totalmente consistente consigo misma (muy precisa, tal y como se menciona en el anterior apartado), pero no ser exacta. Para determinar la exactitud es necesario el recurrir a la comparación con elementos externos que nos reflejen el valor de la realidad.

En el caso de los ajustes de los bloques fotogramétricos la exactitud es evaluada mediante el empleo de puntos de comprobación cuyas coordenadas terreno son conocidas y que no son empleados para la resolución del sistema. El error medio cuadrático de las diferencias entre las coordenadas calculadas y los valores conocidos proporcionan la medida de la exactitud de la solución. Si los puntos de comprobación no pueden ser medidos con una mayor exactitud que la exactitud prevista del ajuste del bloque, su exactitud debe ser tenida en cuenta en el proceso de evaluación.

Si se dispone de un número reducido de puntos de comprobación, es posible el repetir el ajuste considerando puntos de apoyo como puntos de comprobación y puntos de

comprobación como puntos de apoyo. Si no se produce una diferencia significativa de las estadísticas, se puede concluir que la solución es válida.

Es importante tener en cuenta que la exactitud no puede ser evaluada de forma correcta utilizando sólo los puntos de apoyo. A menos que la solución tenga una gran redundancia, cualquier error de medida en los puntos de control será absorbido en los parámetros de orientación calculados afectando negativamente a la exactitud de la solución.

9.6.3.3 Fiabilidad

Otro aspecto importante a comprobar es la fiabilidad de la solución, definida como su resistencia a la presencia de errores groseros en los datos de entrada. Si no estos errores groseros no se detectan en los datos de entrada, los resultados de la solución pueden quedar afectados o ser completamente invalidados. Los datos erróneos pueden ser detectados solo si se disponen de observaciones redundantes, dentro de una configuración geométrica robusta que permite a un valor servir como comprobación de otro. Los errores groseros serán detectados analizando los residuos de cada observación. Sin embargo, la geometría de la imagen afecta de una forma importante el efecto que tiene un error grosero en el residuo final y su influencia en los parámetros calculados. Los métodos de estimación robusta, utilizando de forma conjunta con los mínimos cuadrados convencionales, puede ser una herramienta útil para la edición de grandes conjuntos de datos que puedan contener dichos errores groseros.

Si se considera el caso de un punto con coordenadas terreno desconocidas medidas en una sola foto su residuo siempre será 0, no existe forma de conocer cómo es de grande el error asociado con dicha medida ni como el error en esa medida ha sido absorbida en las coordenadas terreno calculadas. Si el punto se mide en dos fotos, si el error de medida se realiza de acuerdo con la línea epipolar del modelo, este error no tendrá ningún efecto en los residuos calculados tan sólo en la profundidad del punto considerado. Sólo si se dispone de una medida de este punto en una tercera fotografía es posible el detectar los errores de medida a lo largo de una línea epipolar.

En los ajustes de bloques, la situación es más complicada, como consecuencia de los múltiples rayos de imágenes y la geometría general mucho más complicada. Esto hace que la detección de zonas débiles sea más complicada, al igual que la inspección de los residuos a nivel individual como consecuencia del elevado número de observaciones –medidas– realizadas. Para ello es necesario el recurrir a la cuantificación de la susceptibilidad de cada residuo a contener errores de medida y establecer determinados criterios para el rechazo de las medidas individuales basadas en sus residuos.

Para utilizar los residuos para comprobar la presencia de errores groseros, es necesario separar los residuos propios de la geometría y los residuos derivados de la presencia de errores groseros dentro de la observación correspondiente. La geometría que determina cada residuo individual se resume en la matriz Q_{vv} , la matriz cofactor de los residuos.

$$Q_{vv} = W - BN^{-1}B^T$$

La comprobación de residuos debe realizarse utilizando los residuos estandarizados, que se obtienen de la división del residuo por su desviación típica (raíz cuadrada del elemento correspondiente de la diagonal de Q_{vv}). Si la redundancia de la solución es grande, se puede utilizar el estadístico t , en caso contrario, se puede utilizar el estadístico τ . También pueden ser empleados modelos de estimación robusta en este caso.

9.6.3.4 Procedimientos para el análisis de resultados

Comprobación de la varianza de referencia

El primer paso es la comprobación de la varianza de referencia, $\hat{\sigma}_0^2$. Sea la varianza de referencia a priori, σ_0^2 , r los grados de libertad (redundancia) en el ajuste y se asume que los residuos v_i se distribuyen de acuerdo con una distribución normal. El estadístico $\frac{r \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ tiene una distribución χ^2 con r grados de libertad. El intervalo de confianza de doble cola 100 (1- α) para σ_0^2 se obtiene mediante:

$$(r \hat{\sigma}_0^2 / \chi_{r, \alpha/2}^2) < \sigma_0^2 < (r \hat{\sigma}_0^2 / \chi_{r, 1-\alpha/2}^2)$$

Si σ_0^2 es incorrecto o el modelo matemático utilizado es inadecuado o incompleto (no tiene en cuenta los errores sistemáticos), entonces σ_0^2 tendrá un valor fuera del intervalo.

Existen dos comprobaciones fundamentales cuando la prueba de la varianza de referencia falla, la primera se corresponde con el modelo funcional y la segunda se corresponde con el modelo estocástico. En la primera parte, es necesario comprobar que:

1. los cálculos han sido realizados de una forma correcta;
2. que el modelo matemático ha sido formulado de una forma adecuada, las ecuaciones están escritas de forma correcta y han sido bien linealizadas (si se trata de ecuaciones no lineales);
3. todos los errores sistemáticos posibles (deficiencias del modelo) han sido corregidos de una forma adecuada;
4. cualquier error grosero ha sido identificado, localizado y eliminado.

Una vez que todos estos aspectos han sido comprobados es necesario analizar el propio valor de la varianza a priori σ_0^2 . La varianza a priori es esencialmente un factor de escala que indica cómo de reales han sido los valores elegidos de las varianzas y las covarianzas de las observaciones utilizadas en el proceso de ajuste del bloque. Si no es posible el establecer el grado de adecuación de σ_0^2 o no existe un valor a priori disponible, la siguiente evaluación estadística posterior al ajuste debe ser realizada utilizando el valor de varianza de referencia a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ puesto que es la única información disponible. El valor de $\hat{\sigma}_0^2$ es calculado a partir de los residuos de las observaciones calculados, v , que son estimados a partir de los errores reales de las observaciones (ϵ), y muestran sólo una parte de los errores reales (Mikhail, 1980¹). Además, $\hat{\sigma}_0^2$ combina todas las fuentes de error, que no pueden ser separadas y además es un estadístico muy limitado, por tanto, su prueba estadística global correspondiente no es muy efectiva.

Comprobación para los errores groseros

Si v_i es el residuo i y σ_{v_i} es su desviación típica, entonces:

$$\bar{v}_i = v_i / \sigma_{v_i}$$

que es denominado como residuo estandarizado. Habitualmente, el esfuerzo para calcular $\sum v v$ es elevado, por lo que se recurre a una aproximación de σ_{v_i} que se puede obtener de:

$$\hat{\sigma}_{v_i} = [(n - u) / n]^{1/2} \hat{\sigma}_0 \sigma_{l_i} / \sigma_0 = \left[\frac{n - u}{n} \right]^{1/2} \hat{\sigma}_0 q_{l_i}$$

¹ Mikhail, E.M. (1980). Analysis and Adjustment of Survey Measurements. Ed. Van Nostran Reinbold, Nueva York.

donde n es el número de observaciones, u el número de parámetros (siendo $n-u=r$, la redundancia), σ_{l_i} es la desviación típica a priori de la observación l_i , y q_{l_i} es el cofactor a priori o desviación relativa estándar de l_i . Cuando σ_0^2 es conocido, \bar{v}_i sigue una función de densidad de probabilidad igual a $N(0, \sigma_{v_i}^2)$ y

$$\bar{v}_i = |v_i/\sigma_{v_i}| < N_{1-\alpha/2}$$

Si σ_0^2 no es conocido entonces:

$$\bar{v}_i = |v_i/\hat{\sigma}_{v_i}| < \tau_{r,1-\alpha/2}$$

en la que $\hat{\sigma}_{v_i}$ es calculada a partir de la ecuación anterior y τ_r tiene una función de densidad de probabilidad tau con r grados de libertad. Si r es grande como sucede en las redes fotogramétricas y geodésicas τ_r puede ser reemplazada por una t_r de Student o incluso por una función de densidad de probabilidad normal.

Región de confianza para los parámetros estimados

La matriz de covarianza para los parámetros evaluados mediante un ajuste por mínimos cuadrados se puede obtener a partir de:

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

Puede demostrarse que una región de probabilidad constante es limitada por un hiperelipsoide u -dimensional centrado en \hat{x} , si se asume que los parámetros tienen una distribución multivariante normal. La función:

$$k^2 = (x - \hat{x})^T \Sigma_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} (x - \hat{x})$$

k^2 tiene una distribución χ_u^2 con una probabilidad para un punto estimado definido por:

$$P(\chi_u^2 - k^2) = 1 - \alpha$$

Para el caso bidimensional (elipses de error) los valores típicos de k y las probabilidades correspondientes se muestran en la Tabla 2. Los valores se obtienen a partir de la expresión $k = \sqrt{\chi_{2,\alpha}^2}$, que es un caso particular del caso general, $k = \sqrt{F_{2,r,\alpha}^2}$. En el caso tridimensional (elipsoides de error) los valores se muestran en la Tabla 3. Cuando $k=1$, se trata de una región estándar, elipse de error estándar (2D) o elipsoide de error estándar (3D).

Tabla 2. Valores de k y probabilidades correspondientes de error en 2D

P	0.394	0.500	0.900	0.950	0.990
K	1.000	1.177	2.146	2.447	3.035

Tabla 3. Valores de k y probabilidades correspondientes de error en 2D

P	0.199	0.500	0.900	0.950	0.990
K	1.000	1.538	2.500	2.700	3.368

Para un determinado Σ , por ejemplo, un punto en un plano, el semieje mayor, a , y el semieje menor, b , de la elipse de error estándar son obtenidos a partir de los valores propios y los vectores propios (eigenvalues y eigenvectors). Si se desea establecer la región de confianza del 90% (es decir, nivel de significación de $\alpha=0.10$), los valores de a y b son multiplicados por 2.146. Para las regiones estándar, existe una probabilidad de 0.683 de que el punto ajustado caiga dentro del intervalo unidimensional, una probabilidad de 0.394 de que caiga dentro de la elipse de error estándar y solo una probabilidad de 0.199 de que caiga dentro del elipsoide de error estándar.

Si se utiliza la varianza de referencia a posteriori, $\hat{\sigma}_0^2$, entonces tendremos:

$$\hat{\Sigma}_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 N_{xx}^{-1}$$

donde Σ_{xx} ó $\hat{\Sigma}_{xx}$ proporciona la descripción más completa de la calidad de los valores estimados, como las coordenadas del punto destino, dicha valoración se establece a través de la media de las varianzas.

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{u} \text{tr} (\Sigma_{xx})$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{u} \text{tr} (\hat{\Sigma}_{xx})$$

donde $\bar{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_x^2$ son los estimados de la exactitud media de las coordenadas y u es la dimensión de la matriz covarianza, o el número de coordenadas con la que está asociada. Es importante observar que se considera la traza de la matriz de covarianza que también es igual a la suma de sus valores propios, o la suma de varianzas de la matriz transformada en la que todas las covarianzas son iguales a cero (es decir, en la que se han eliminado todas las correlaciones).

Elipses de error

La varianza y la desviación típica son medidas de la precisión del caso unidimensional de una variable aleatoria como, por ejemplo, la distancia. En el caso bidimensional, como, por ejemplo, la posición de un punto en la imagen, se deben establecer las elipses de error alrededor del punto considerado considerando diferentes regiones en función de las probabilidades deseadas. La orientación de la elipse en relación con el sistema de ejes x, y depende de la correlación entre x y y . Si no están correlacionados, los ejes de la elipse serán paralelos a x e y . Si las dos coordenadas tienen la misma precisión, $\sigma_x = \sigma_y$, y la elipse se convierte en un círculo.

Si se considera el caso general donde la matriz de covarianza para la posición de un punto P viene dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

Los semiejes mayores y menores de la elipse correspondiente vienen determinados por los valores y vectores propios. Para su obtención es necesario el definir un polinomio de segundo grado (denominado polinomio característico) que se configura utilizando los elementos de Σ .

$$\lambda^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\lambda + (\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0$$

A partir de dicha expresión se obtienen las dos raíces λ_1 y λ_2 (que son los valores propios de Σ). Las raíces de dichos valores definen los semiejes de la elipse estándar de error. La orientación de la elipse se obtiene como el ángulo θ entre el eje x y el semieje mayor de la elipse.

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

El cuadrante de 2θ se determina considerando que el signo de $\sin 2\theta$ tiene el mismo signo que σ_{xy} y que $\cos 2\theta$ tiene el mismo signo que $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$.

Así, por ejemplo, para una elipse con $a=2.447a_s$ y $b=2.447b_s$, donde a_s y b_s , son los semiejes mayores y menores, respectivamente de la elipse estándar, la probabilidad de que el punto caiga dentro de la elipse es de 0.95.

A menudo es frecuente el interés por la exactitud relativa entre dos puntos en una red horizontal. Entonces las diferencias de coordenadas son:

$$\begin{aligned}d_x &= x_2 - x_1 \\d_y &= y_2 - y_1\end{aligned}$$

Y la matriz total de covarianzas para las coordenadas es:

$$\Sigma_{1,2} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_1} & \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_1 y_2} \\ \sigma_{x_1 y_1} & \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 x_2} & \sigma_{y_1 y_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{y_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2 y_2} \\ \sigma_{x_1 y_2} & \sigma_{y_1 y_2} & \sigma_{x_2 y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = JP_{1,2}$$

y

$$\Sigma_{dd} = J\Sigma_{1,2}J^T$$

de donde se deduce que:

$$\begin{aligned}\sigma_{dx}^2 &= \sigma_{x_1}^2 - 2\sigma_{x_1 x_2} + \sigma_{x_2}^2 \\ \sigma_{dy}^2 &= \sigma_{y_1}^2 - 2\sigma_{y_1 y_2} + \sigma_{y_2}^2 \\ \sigma_{dxdy} &= \sigma_{x_1 y_1} - \sigma_{x_1 y_2} - \sigma_{x_2 y_1} + \sigma_{x_2 y_2}\end{aligned}$$

A partir de las varianzas σ_{dx}^2 y σ_{dy}^2 , y la covarianza σ_{dxdy} , es sencillo obtener los elementos de la elipse de error relativo.

En el caso tridimensional, donde se considera la elevación y la posición horizontal, la región que define la precisión es un elipsoide, cuyos valores vienen definidos en la Tabla 3.

Los conceptos de elipse de error y de elipsoide de error son bastante útiles para establecer las regiones de confianza de los puntos que son determinados mediante técnicas fotogramétricas. Estas regiones son medidas de la fiabilidad de la determinación posicional de tales puntos, y de tal forma, podrán ser especificadas como elemento para el control de las especificaciones técnicas establecidas.

Aunque tanto las elipses de error absoluto (para los puntos) como las elipses de error relativas (para las líneas) son utilizadas para la evaluación de la calidad del ajuste, es frecuente reemplazar la representación bidimensional por una cantidad individual (equivalente a $\bar{\sigma}$). En este caso, se sustituye la distribución de probabilidad elíptica por una distribución de probabilidad circular. En este caso se utiliza la desviación típica circular σ_c , que se calcula a partir de los dos semiejes de la elipse de error. El valor de σ_c depende de las magnitudes relativas de dichos ejes.

Sea $\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$ que representa la matriz de covarianza para las coordenadas x,y de un punto. Entonces, $\lambda_1 = a^2$ y $\lambda_2 = b^2$ son los vectores propios ($\lambda_1 > \lambda_2$) de Σ_{xx} , y a,b son los semiejes mayor y menor de la elipse de error. Es importante tener en cuenta que, $tr(\Sigma_{xx}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = a^2 + b^2$. Si $\sigma_{min} = b = \sqrt{\lambda_2}$ y $\sigma_{max} = a = \sqrt{\lambda_1}$, entonces el valor de la ratio $\sigma_{min}/\sigma_{max}$ determina la relación para calcular el valor de σ_c . Cuando $\sigma_{min}/\sigma_{max}$ tiene un valor entre 1.0 y 0.6, entonces:

$$\sigma_c \approx (0.5222 \sigma_{min} + 0.4778 \sigma_{max})$$

Una buena aproximación que proporciona una aproximación ligeramente mayor (es decir, más conservadora) es proporcionada por la expresión:

$$\sigma_c \approx 0.5 (a + b)$$

que se puede utilizar hasta la relación $\sigma_{min}/\sigma_{max} \leq 0.2$.

La medida de la exactitud media, $\bar{\sigma}$ es:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2)$$

y

$$\bar{\sigma}_c = \left[\frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

que se puede aplicar sólo cuando $\sigma_{min}/\sigma_{max}$ toma un valor entre 1.0 y 0.8, tomando en dicho caso la expresión correspondiente para el cálculo de σ_c . Cuando la ratio decrece el valor de σ_c se hace progresivamente mayor, con un incremento máximo de 20% cuando la relación es igual a 0.2.