

PARCIAL FINAL PRESENCIAL – MARTES 14 DE JULIO DE 2020

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

**Ejercicio 1.**(10 pts.) La cantidad de palabras formadas por las letras B y C y tres vocales distintas donde las consonantes están separadas son: (A) 4!; (B) 5!; (C) 6!; (D) 7!; (E) 8!.

**Ejercicio 2.**(10 pts.) Sea  $A = \{1, 2, 3\}$ . La cantidad de funciones  $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  tales que  $f(X) \subseteq X$  para todo  $X \subseteq A$  es igual a: (A)  $2^3$ ; (B)  $2^6$ ; (C)  $2^8$ ; (D)  $2^9$ ; (E)  $2^{12}$ .

**Ejercicio 3.**(10 pts.) Sea  $(a_n)$  una sucesión que verifica  $a_n = \frac{(n-1)a_{n-1} + 2^{n-2}}{n}$  para  $n \geq 2$ . Si  $a_{64} = 2^{57} + 2$  entonces: (A)  $a_1 = 0$ ; (B)  $a_1 = 1/2$ ; (C)  $a_1 = 64$ ; (D)  $a_1 = 128$ ; (E)  $a_1 = 129$ .

**Ejercicio 4.**(10 pts.) Consideremos las funciones generatrices  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  y  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ . Se sabe que  $a_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$  para todo  $n \geq 0$  y que  $a_0 = 1$ . Indique la opción correcta:

- (A) La función generatriz  $f(x)$  es invertible y su inversa es  $g(x)$ ;
- (B) La función generatriz  $f(x)$  es invertible y su inversa es  $xg(x)$ ;
- (C) La función generatriz  $f(x)$  es invertible y su inversa es  $1 - xg(x)$ ;
- (D) La función generatriz  $f(x)$  es invertible y su inversa es  $1 + xg(x)$ ;
- (E) La función generatriz  $f(x)$  no es invertible.

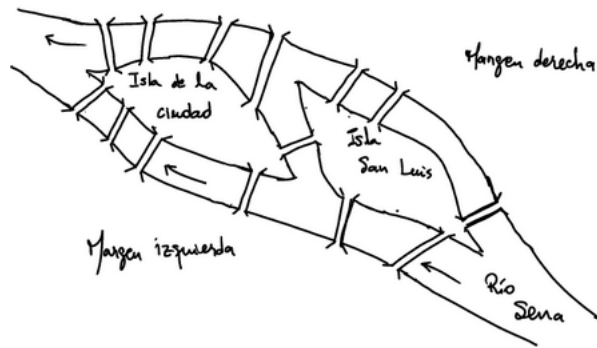
(Nota: la invertibilidad es con respecto a la operación producto.)

**Ejercicio 5.**(10 pts.) Sea  $N$  el número de funciones  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  que verifica que si  $i + j$  es primo con  $i \neq j$  entonces  $f(i) \neq f(j)$  entonces:

- (A)  $N < 10$ ; (B)  $10 \leq N < 20$ ; (C)  $20 \leq N < 30$ ; (D)  $30 \leq N < 40$ ; (E)  $N \geq 40$ .

(Sugerencia: resuélvalo como un problema de coloración de grafos)

**Ejercicio 6.**(10 pts.) El mapa de la figura corresponde a una parte de la ciudad de París. Esta ciudad está dividida en margen derecha y margen izquierda por el Río Sena. En el centro de la ciudad hay dos islas, llamadas la "Île de la Cité" (Isla de la Ciudad) e "Île Saint Louis" (Isla San Luis). Estas islas están conectadas con las márgenes y entre sí por numerosos puentes, que están indicados en la figura.



Se desea organizar un paseo guiado para que los turistas recorran los puentes, atravesándolos a todos una sola vez. Seleccione **todas** las opciones correctas:

- (A) Es posible hacerlo empezando en la Isla San Luis y terminando en la margen izquierda o vice-versa.
- (B) Es posible hacerlo comenzando en la Isla de la Ciudad y terminando en la Isla San Luis o vice-versa.
- (C) Es posible hacerlo empezando y terminando en el mismo lugar.
- (D) Es posible hacerlo empezando en la Isla de la Ciudad y terminando en la margen derecha o vice-versa.
- (E) No es posible hacer el paseo.

### Ejercicios de desarrollo

**Ejercicio 7.**(20 puntos en total).

- (a)(5 puntos) Enuncie el principio de inclusión-exclusión (P.I.E.).
- (b)(7 puntos) Pruebe el P.I.E. para el caso de dos condiciones (o dos conjuntos en caso de considerar la versión conjuntista).
- (c)(8 puntos) Sea  $\mathcal{U}$  el conjunto de todas las palabras de 5 letras que pueden obtenerse permutando las letras de la palabra COVID (incluyendo esta palabra). Calcule cuántas palabras de  $\mathcal{U}$  verifican simultáneamente las siguientes condiciones:
  - i) Las letras O y V están separadas;
  - ii) Las letras V e I están separadas.

**Ejercicio 8.**(20 puntos en total).

- (a)(4 puntos) Defina isomorfismo y explique que significa que dos grafos sean isomorfos.
- (b)(4 puntos) Explique que significa que dos grafos sean homeomorfos.
- (c)(6 puntos) Halle (a menos de isomorfismo) todos los grafos homeomorfos a  $K_{1,3}$  con hasta 6 vértices.
- (d)(6 puntos) Sea  $G$  el grafo completo con vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a  $K_{1,3}$  tiene  $G$ ?