Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Agosto 2020**

EXAMEN – MIÉRCOLES 12 DE AGOSTO DE 2020

Nro. de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen. El examen dura tres horas. Cada respuesta incorrecta en el múltiple opción resta 2 puntos.
No está permitido usar calculadora ni "material".

Llenar					**No llenar**	
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7

Ejercicio 1.(10 pts.) La cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 21$ con las restricciones $-3 \leq x_i \leq 10$ para $i = 1, 2, 3$ es: (A) 28; (B) 55; (C) 253; (D) 496; (E) 91.

Ejercicio 2.(10 pts.) Para n natural sea a_n la cantidad de formas de pagar n pesos con monedas de \$ 1 y \$ 2, donde $a_0 = 1$. Consideramos la función generatriz $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, entonces $f(x)$ es:
(A) $\dfrac{1/2}{(1-x)^2} + \dfrac{1/4}{1-x} + \dfrac{1/4}{1+x}$; (B) $\dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{1}{1-x}$; (C) $\dfrac{1}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^3}$;
(D) $\dfrac{1/2}{1+x} + \dfrac{(1/2)x}{1+x^2} - \dfrac{1/2}{1+x^2}$; (E) $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x}$.

Ejercicio 3.(10 pts.) Sea (a_n) una sucesión de reales positivos que verifica $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 3n}$, $\forall n \geq 2$ con condición inicial $a_1 = \sqrt{273}$. Entonces a_{20} vale: (A) 30; (B) 35; (C) 40; (D) 45; (E) 50.

Ejercicio 4.(10 pts.) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Sea N la cantidad de relaciones de órdenes parciales $\mathcal{R}$ sobre A cuyo diagrama de Hasse consiste en una unión de 4 cadenas disjuntas de tamaño 3 y que verifican simultáneamente las siguientes tres condiciones: i) $1, 2, 3$ y 4 son elementos minimales; ii) $9, 10, 11$, 12 son elementos maximales; iii) 1 no es menor que 12. Entonces N es igual a:
(A) 432; (B) 576; (C)2592; (D) 3456; (E) 10368.

Ejercicio 5.(10 pts.) $K_{n,m,p}$ es el grafo tripartito completo con $n+m+p$ vértices, es decir los vértices de $K_{n,m,p}$ se pueden separar en tres conjuntos disjuntos con n, m y p vértices cada uno, tal que cada vértice no sea adyacente a ningún vértice del conjunto al que pertenece y sea adyacente a todos los vértices de los otros dos conjuntos. Queremos saber para cuales $n \geq 1$ los grafos $G_n = K_{n,2n,3n}$ y $H_n = K_{n,2n,3n+1}$ admiten un ciclo hamiltoniano. Marque la opción correcta:
(A) Ambos lo admiten para todo n.
(B) G_n lo admite para todo n, pero H_n nunca lo admite, independientemente del valor de n.
(C) G_n lo admite para algunos n pero no para todos y H_n nunca lo admite, independientemente de n.
(D) G_n nunca lo admite, independientemente de n, pero H_n sí para todo n.
(E) Ninguno de los dos lo admite para ningún valor de n.

Ejercicios de desarrollo (50 puntos)

Se deben justificar todas las respuestas

Ejercicio 6.(20 puntos en total). Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales incluyendo el 0.

(a)(5 pts.) Defina relación de equivalencia en un conjunto A.

(b)(5 pts.) Defina conjunto cociente $A/\sim$, donde $\sim$ es una relación de equivalencia sobre A.

(c) Considere $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$ y la relación de equivalencia $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ si una se obtiene de la otra por una reordenación (por ejemplo $(1, 3, 1) \sim (3, 1, 1)$).

i) (2 pts.) Hallar $[(0, 1, 4)]$ (la clase de equivalencia del elemento $(0, 1, 4)$);

ii) (2 pts.) Hallar $[(2, 1, 2)]$ (la clase de equivalencia del elemento $(2, 1, 2)$);

iii) (2 pts.) Hallar el conjunto cociente A/R.

(d)(4 pts.) Determine cuántas formas hay de repartir 5 pelotitas idénticas en 3 recipientes idénticos (pueden quedar recipientes vacios).

Ejercicio 7.(30 puntos en total). Para las partes (c) y (d) G es un grafo **plano**, **simple**[1] (i.e. sin lazos ni aristas múltiples) y **conexo** con v vértices, $e \geq 3$ aristas y **sin ciclos de largo** $\ell \leq 5$.

(a)(4 pts.) Enuncie la fórmula de Euler para grafos planos conexos.

(b)(5 pts.) Encuentre un grafo plano simple y dos inmersiones planas del mismo, donde los grados de las regiones sean diferentes (hay un ejemplo con 5 vértices).

(c)(7 pts.) Pruebe que si una inmersión plana de G determina r regiones (contando la región no acotada) entonces $r \leq e/3$.

(d)(7 pts.) Pruebe que $3v \geq 2e + 6$.

(e)(7 pts.) Pruebe que un grafo 3-regular[2], plano, simple y conexo posee un ciclo de largo $\ell \leq 5$.

[1] Un grafo se dice simple cuando no tiene lazos (loops) ni aristas multiples.

[2] Un grafo es k-regular si cada vértice es incidente con exactamente k aristas.