Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Diciembre 2020**

SEGUNDO PARCIAL – MIÉRCOLES 9 DE DICIEMBRE DE 2020

Nro. de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen. El examen dura tres horas. Cada respuesta incorrecta en el múltiple opción resta 1 punto. No está permitido usar calculadora ni ningún tipo de material. No usar el celular mientras la prueba esté en transcurso (en particular se prohibe sacar fotos de la prueba).

Llenar					**No llenar**					
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6a	Ej 6b	Ej 6c	Ej 7a	Ej 7b	Ej 7c

Ejercicio 1.(6 pts.) Si $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz cero-uno (matriz booleana) de una relación R sobre un conjunto A entonces, podemos afirmar que la relación R

A; no es antisimétrica, es simétrica y reflexiva;
B. no es simétrica, es antisimétrica y reflexiva;
C. no es simétrica ni antisimétrica, es reflexiva y transitiva;
D. no es simétrica, es asimétrica y transitiva;
E. no es antisimétrica ni transitiva, es reflexiva.

Ejercicio 2.(6 pts.) ¿Cuántas relaciones de orden (total o parcial) R hay sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ que cumplen que $\{(1, 2), (2, 3)\} \subseteq R$?
A. 4 B. 6 C. 10 D. 12 E. 9

Ejercicio 3.(6 pts.) Sobre el conjunto $A = \mathbb{Z}$ se define la relación de equivalencia aRb si a^3 y b^3 dejan el mismo resto en la división por 7. Indique la opción correcta:

A. $\#A/R = 3$ y $[1] \cap [2] \neq \emptyset$;
B. $\#A/R = 3$ y $[1] \cap [2] = \emptyset$;
C. $\#A/R > 3$ y $[1] = [2]$;
D. $\#A/R < 3$ y $[1] = [2] = [4]$;
E. $\#A/R \leq 3$ y $[3] \cap [6] = \emptyset$.

(Sug. Vea cuáles son los posibles restos que puede dejar a^3 en la división por 7.)

Ejercicio 4.(6 pts.) Para cada natural $k > 2$, sea G_k el grafo que se obtiene agregándole a la unión disjunta de P_2 y P_k todas las aristas con un vértice en P_2 y el otro en P_k. Concretamente $G_k = (V_k, E_k)$ con $V_k = \{a, b, 1, 2, \cdots, k\}$ y $E_k = \{\{a, b\}, \{i, i + 1\}, \{a, j\}, \{b, j\} : 1 \leq i < k, 1 \leq j \leq k\}$. Indique la opción correcta:

A. Si $k > 4$ entonces G_k no es plano.
B. Existe $k > 2$ tal que G_k es autocomplementario.
C. G_k tiene un recorrido Euleriano $\Leftrightarrow k$ es impar.
D. G_k tiene un circuito Euleriano $\Leftrightarrow k$ es par.
E. Si $k \geq 5$ entonces G_k no tiene caminos hamiltonianos.

Ejercicio 5.(6 pts.) Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y conexo cuyas inmersiones planas determinan 20 regiones. Si para alguna inmersión plana cada región tiene 4 aristas en su frontera, entonces:

A. $|V| = 22$ y existe $v \in V$ tal que $gr(v) < 4$;
B. $|V| = 22$ y $gr(v) \geq 4\, \forall v \in V$;
C. $|V| > 22$ y $gr(v) \geq 4\, \forall v \in V$;
D. $|V| > 22$ y existe $v \in V$ tal que $gr(v) < 4$;
E. $|V| < 22$ y $gr(v) < 4\, \forall v \in V$.

Los siguientes ejercicios son de desarrollo y deben justificarse todas las respuestas.

Ejercicio 6 Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y T un subgrafo de G.

a) (3 pts.) ¿Cuándo decimos que T es un árbol? ¿Qué significa que T sea un árbol recubridor para G?
b) (6 pts.) Sea $e \in E$ una arista que forma parte de un ciclo en G. Pruebe que $G - e$ continua siendo conexo.
c) (6 pts.) Probar que G posee un árbol recubridor.

Ejercicio 7 Sea G un grafo plano conexo simple (o sea sin loops ni aristas múltiples) con $v \geq 3$ vértices, e aristas y r la cantidad de regiones determinadas por una inmersión plana de G.

a) (3 pts.) Enuncie la fórmula de Euler para G y diga que relación hay entre los grados de las regiones de una inmersión plana de G y la cantidad de aristas (no se precisa demostrar).
b) (6 pts.) Halle el mínimo valor que puede tener $3v - e$ y concluya que K_5 no es plano.
c) (6 pts.) Asumiendo que G sea además bipartito obtenga el valor mínimo que puede tener $2v - e$ y concluya que $K_{3,3}$ no es plano.