Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Diciembre 2020**

Segundo parcial – Miércoles 9 de diciembre de 2020

Nro. de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen. El examen dura tres horas. Cada respuesta incorrecta en el múltiple opción resta 1 punto. No está permitido usar calculadora ni ningún tipo de material. No usar el celular mientras la prueba esté en transcurso (en particular se prohibe sacar fotos de la prueba).

Llenar					**No llenar**					
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6a	Ej 6b	Ej 6c	Ej 7a	Ej 7b	Ej 7c

Ejercicio 1.(6 pts.) Si $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz cero-uno (matriz booleana) de una relación R sobre un conjunto A entonces, podemos afirmar que la relación R

A; no es antisimétrica, es simétrica y reflexiva;
B. no es simétrica, es antisimétrica y reflexiva;
C. no es simétrica ni antisimétrica, es reflexiva y transitiva;
D. no es simétrica, es asimétrica y transitiva;
E. no es antisimétrica ni transitiva, es reflexiva.

R: Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. R no es simétrica pues $a_1 R a_4$ pero $a_4 \not R a_1$. R no es antisimétrica pues $a_1 R a_3$ y $a_3 R a_1$, y por el mismo motivo no es asimétrica. R es reflexiva ya que $a_i R a_i$ $\forall i$. R no es transitiva ya que $a_4 R a_3$ y $a_3 R a_1$ pero $a_4 \not R a_1$.
Por lo tanto la opcion correcta es la E.

Ejercicio 2.(6 pts.) ¿Cuántas relaciones de orden (total o parcial) R hay sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ que cumplen que $\{(1,2),(2,3)\} \subseteq R$?

A. 4 B. 6 C. 10 D. 12 E. 9

R: La opción correcta es la C. Contando diagramas de Hasse posibles para un tal orden, se ve que hay 6 posibilidades de 3 niveles y 4 de 4 niveles, como se ve en la imagen. Y 6+4=10.

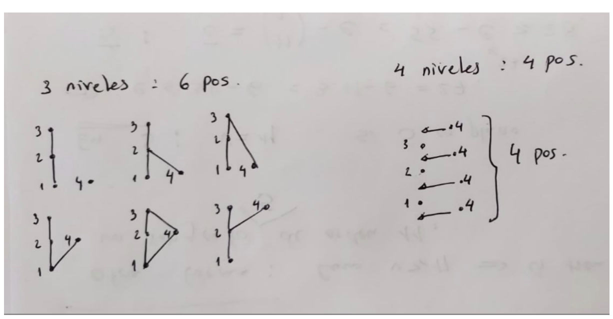

Figure 1. Ejercicio 2.

Ejercicio 3.(6 pts.) Sobre el conjunto $A = \mathbb{Z}$ se define la relación de equivalencia aRb si a^3 y b^3 dejan el mismo resto en la división por 7. Indique la opción correcta:

A. $\#A/R = 3$ y $[1] \cap [2] \neq \emptyset$;
B. $\#A/R = 3$ y $[1] \cap [2] = \emptyset$;
C. $\#A/R > 3$ y $[1] = [2]$;
D. $\#A/R < 3$ y $[1] = [2] = [4]$;
E. $\#A/R \leq 3$ y $[3] \cap [6] = \emptyset$.

(Sug. Vea cuáles son los posibles restos que puede dejar a^3 en la división por 7.)

R: Veamos cuáles son los posibles restos de dividir un cubo entre 7. Si $a = 7k+i$ con $k \in \mathbb{Z}, i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ entonces $a^3 = (7k+i)^3 = 7^3k^3 + 3 \times 7^2k^2 \times i + 3 \times 7k \times i^2 + i^3$ es un múltiplo de 7 más i^3 y por lo tanto tiene el mismo resto que i^3 al dividirlo por 7. Tabulemos los posibles restos de a^3 en función de i.

i (a=7k+i)	i^3	resto de dividir a^3 por 7
0	0	0
1	1	1
2	8	1
3	27	6
4	64	1
5	125	6
6	216	6

Se ve que hay 3 restos posibles y por lo tanto 3 clases de equivalencia diferentes, o sea que $A/R = 3$. A su vez 1^3 y 2^3 tienen el mismo resto (1), o sea que son equivalentes y $[1] \cap [2] \neq \emptyset$. La opción correcta es entonces la A.

Ejercicio 4.(6 pts.) Para cada natural $k > 2$, sea G_k el grafo que se obtiene agregándole a la unión disjunta de P_2 y P_k todas las aristas con un vértice en P_2 y el otro en P_k. Concretamente $G_k = (V_k, E_k)$ con $V_k = \{a, b, 1, 2, \cdots, k\}$ y $E_k = \{\{a, b\}, \{i, i+1\}, \{a, j\}, \{b, j\} : 1 \leq i < k, 1 \leq j \leq k\}$. Indique la opción correcta:

A. Si $k > 4$ entonces G_k no es plano.
B. Existe $k > 2$ tal que G_k es autocomplementario.
C. G_k tiene un recorrido Euleriano $\Leftrightarrow$ k es impar.
D. G_k tiene un circuito Euleriano $\Leftrightarrow$ k es par.
E. Si $k \geq 5$ entonces G_k no tiene caminos hamiltonianos.

R: Los vértices de P_2 quedan con grado $k+1$. En P_k hay dos casos: 1 y k tienen grado 3, y los demás (que son $k-2$) tienen grado 4.
La opción A es falsa como se muestra en la figura 2. a y b son vértices aislados en el grafo complementario de G_k y por lo tanto B es falsa. $k+1$ es par $\iff$ k es impar $\iff$ G_k tiene recorrido Euleriano, con lo cual C es verdadera. D es falsa ya que hay vértices de grado impar. E es falsa: un camino hamiltoniano válido para cualquier k es $ab12\cdots k$. La respuesta correcta es C.

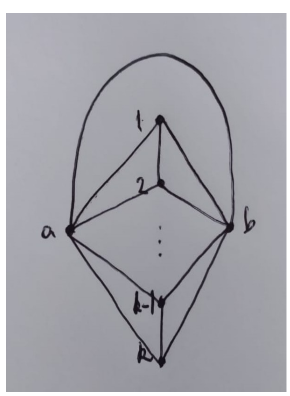

FIGURE 2. Ejercicio 4.

Ejercicio 5.(6 pts.) Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y conexo cuyas inmersiones planas determinan 20 regiones. Si para alguna inmersión plana cada región tiene 4 aristas en su frontera, entonces:

A. $|V| = 22$ y existe $v \in V$ tal que $gr(v) < 4$;
B. $|V| = 22$ y $gr(v) \geq 4 \, \forall v \in V$;
C. $|V| > 22$ y $gr(v) \geq 4 \, \forall v \in V$;
D. $|V| > 22$ y existe $v \in V$ tal que $gr(v) < 4$;
E. $|V| < 22$ y $gr(v) < 4 \, \forall v \in V$.

R: $2e = \sum gr(R_i) = 4 \times 20 = 80$ por lo que $e = 40$. Como G es plano se cumple $v - e + r = 2$, de donde $v = 2 + e - r = 2 + 40 - 20 = 22$. A su vez $\sum gr(v_i) = 2e = 80$. Habiendo 22 vértices, si los grados de todos los vértices fueran ≥ 4 se tendría que $\sum gr(v_i) \geq 4 \times 22 = 88$ lo cual es falso. Se concluye que la opción correcta es la A.

Los siguientes ejercicios son de desarrollo y deben justificarse todas las respuestas.

Ejercicio 6 Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y T un subgrafo de G.

a) (3 pts.) ¿Cuándo decimos que T es un árbol? ¿Qué significa que T sea un árbol recubridor para G?
b) (6 pts.) Sea $e \in E$ una arista que forma parte de un ciclo en G. Pruebe que $G - e$ continua siendo conexo.
c) (6 pts.) Probar que G posee un árbol recubridor.

R:

a) Un árbol es un grafo conexo sin ciclos. Un árbol recubridor de G es un subgrafo recubridor (con conjunto de vértices igual a V) que a su vez es un árbol.

b) Sea $a_0 a_1 \cdots a_n$ el ciclo del que forma parte la arista e (o uno de ellos si hay más de uno). Se tiene que $a_0 = a_n$ y e une a a_i con a_{i+1} para $i \in [0, n-1]$. Ahora sean v y w dos vértices del grafo $G - e$. Como los vértices de $G - e$ son los mismos que los de G y G es conexo, se puede considerar un camino simple $(v = b_0) b_1 \cdots b_{m-1} (b_m = w)$ con aristas en G. Si e no aparece entre las aristas del camino, entonces el camino está en $G - e$. Si e aparece uniendo a b_j con b_{j+1} entonces $a_i = b_j, a_{i+1} = b_{j+1}$ o $a_i = b_{j+1}, a_{i+1} = b_j$. Supongamos se da la segunda opción (la primera es análoga) entonces el camino $b_0 b_1 \cdots b_{j-1} a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_i b_{j+2} b_{j+3} \cdots b_m$ es un camino en $G - e$.
En cualquier caso se obtiene un camino en $G - e$ uniendo a v con w y en consecuencia $G - e$ es conexo.

c) Si el grafo G no tiene ciclos, al ser conexo es un árbol y por lo tanto él mismo es un árbol recubridor. Si G tiene ciclos, eliminando aristas de los mismos, podemos paso a paso ir reduciendo el número de ciclos totales del grafo y eventualmente, al haber finitos ciclos, obtendremos un grafo sin ciclos con los mismos vértices que G. Por la parte b) en cada paso el grafo resultante sigue siendo conexo. En el paso final se obtiene entonces un subgrafo recubridor de G que es conexo y no tiene ciclos, y por lo tanto es un árbol recubridor.

Ejercicio 7 Sea G un grafo plano conexo simple (o sea sin loops ni aristas múltiples) con $v \geq 3$ vértices, e aristas y r la cantidad de regiones determinadas por una inmersión plana de G.

a) (3 pts.) Enuncie la fórmula de Euler para G y diga que relación hay entre los grados de las regiones de una inmersión plana de G y la cantidad de aristas (no se precisa demostrar).
b) (6 pts.) Halle el mínimo valor que puede tener $3v - e$ y concluya que K_5 no es plano.
c) (6 pts.) Asumiendo que G sea además bipartito obtenga el valor mínimo que puede tener $2v - e$ y concluya que $K_{3,3}$ no es plano.

R:

a) Fórmula de Euler: $v - e + r = 2$. Se cumple $\sum gr(R_i) = 2e$ donde la suma se realiza sobre todas las regiones que delimita la inmersión plana de G.

b) Los ciclos que determinan a las regiones no infinitas tienen siempre largo mayor o igual a 3 y por lo tanto $gr(R_i) \geq 3$ para estas regiones. A su vez, como $v \geq 3$, la región infinita también cumplirá $gr(R) \geq 3$. Se concluye entonces que $2e = \sum gr(R_i) \geq 3r$, de donde $r \leq \frac{2}{3}e$. Por lo tanto $2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{1}{3}e \Rightarrow 6 \leq 3v - e$. El grafo C_3 cumple $3v - e = 6$ con lo cual 6 es el valor mínimo buscado.
Para K_5: $v = 5, e = \binom{5}{2} = 10$ y $3v - e = 15 - 10 = 5 < 6$ por lo tanto K_5 no es plano.

c) Siendo G además bipartito se pasa a cumplir que tanto las regiones no infinitas como la infinita cumplen $gr(R_i) \geq 4$. Por lo tanto $2e = \sum gr(R_i) \geq 4r$, de donde $r \leq \frac{1}{2}e$. A su vez $2 = v - e + r \leq v - e + \frac{1}{2}e = v - \frac{1}{2}e \Rightarrow 4 \leq 2v - e$. El grafo $K_{1,2}$ cumple $2v - e = 4$ o sea que 4 es el valor minimo buscado.
Para $K_{3,3}$: $v = 6, e = 3 \times 3 = 9$ y $2v - e = 12 - 9 = 3 < 4$ lo cual implica que $K_{3,3}$ no es plano.