Mapping=tex-text [Mapping=tex-text]CMU Concrete Roman [Scale=MatchLowercase,Mapping=tex-text]Gill Sans [Scale=MatchLowercase]Andale Mono

Matemtica Discreta 1

Primer Parcial

Jueves 3 de mayo de 2018

El parcial dura tres horas y media, cada ejercicio mltiple opcin vale cinco puntos y no se restan puntos.
No est permitido usar calculadora ni "material".

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	C	C	C	B

Ejercicios de Mltiple Opcin

Ejercicio Mltiple Opcin 1: La cantidad de elementos del conjunto $\{f : \{1, 2, \ldots, 6\} \to \mathcal{P}\{1, 2, \ldots, 6\}$: f inyectiva,$1 \notin f(1), 2 \notin f(2)\}$ es:

A) $63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ **B)** $16 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ **C)** $16 \cdot 64 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$**.**

Resolucin: Usamos la regla de la suma y distinguimos dos casos, o bien $2 \notin f(1)$ o bien $2 \operatorname{in} f(2)$, y luego la del producto: Caso 1) f inyectiva y $2 \in f(1)$, tenemos entonces: $f(1)$ puede ser elegido de entre $2^{6-2} = 16 = |\{\{2\} \cup S : S \subset \{3, 4, 5, 6\}\}|$ subconjuntos. Luego, $f(2)$ puede ser elegido de entre $2^5 = 32 = |\mathcal{P}(\{1, 3, 4, 5, 6\})|$ subconjuntos, $f(3)$ puede ser elegido de entre $2^6 - 2 = 62$ subconjuntos, $f(4)$ de entre 61 subconjuntos, $f(5)$ de entre 60 y $f(6)$ de entre 59 subconjuntos, subconjuntos. Total de posibilidades: $16 \cdot 32 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ formas.
Caso 2) f inyectiva y $2 \notin f(1)$, tenemos entonces: $f(1)$ puede ser elegido de entre $2^{6-2} = 16 = |\{S : S \subset \{3, 4, 5, 6\}\}|$ subconjuntos. Luego, $f(2)$ puede ser elegido de entre $2^5 - 1 = 31 = |\mathcal{P}(\{1, 3, 4, 5, 6\}) \setminus f(1)|$ subconjuntos, $f(3)$ puede ser elegido de entre $2^6 - 2 = 62$ subconjuntos, $f(4)$ de entre 61 subconjuntos, $f(5)$ de entre 60 y $f(6)$ de entre 59 subconjuntos, subconjuntos. Total de posibilidades: $16 \cdot 31 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ formas.
En total sern $16 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59 = 16 \cdot 63!/58!$

Ejercicio Mltiple Opcin 2: Se desea armar la primera fecha de un campeonato de la liga local de basquet. La liga es conformada por nueve equipos, por lo que un equipo deber tomarse la fecha libre. Cuntas formas hay de armar la fecha, si es relevante al conteo quien es el local y quien es el visitante en cada partido?

A) 630 **B)** 1680 **C)** 15120**.**

Resolucin: Como un equipo quedar libre, primero lo elegimos (de 9 formas posibles). Luego, con los 8 que quedan elegimos cuatro locatarios de C_4^8 formas posibles. Finalmente colocamos los locatarios en una fila y sus contrincantes en otra enfrentada, de 4! formas. En total sern

$$9 \cdot C_4^8 \cdot 4! = 9\frac{8!}{4!} = 15120.$$

Ejercicio Mltiple Opcin 3: Cuntas permutaciones de la palabra "PAPELES" no dejan dos letras juntas?

A) 540 **B)** 600 **C)** 660**.**

Resolucin: Por Inclusin-Exclusin:

$$\frac{7!}{2!2!} - \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{2!} + 5! = 5!(7{\cdot}6/4 - 6 + 1) = 5!(21 - 10)/2$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 = 660.$$

Ejercicio Mltiple Opcin 4: Un cierto tipo cebollitas tienen un perodo de maduracin a partir del cual generan dos cebollitas ms. Se quiera saber si cortando K cebollitas inmaduras a partir del segundo perodo, la poblacin se mantiene estable. Suponiendo que se comienza con una plantacin de 20 cebollitas inmaduras. Indique la opcin correcta:

A) Existe K y es menor que 30.

B) Existe K y es mayor que 40.

C) Ninguna de las anteriores.

Resolucin: Sea a_n el total de cebollitas, a'_n las inmaduras, a''_n las maduras y K la cantidad cortada. Entonces

$$\begin{cases} a_n = a'_n + a''_n - K & n \geq 2 \\ a'_n = 2a''_{n-1} \\ a''_n = a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1} - K$$

Cuya ec. car. es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ o sea $\lambda = -1$ o 2. Por lo tanto una solucin particular ser una constante $a_n^p = A$ con $A = 2A + A - K$ de donde $A = K/2$. La solucin general ser $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n + K/2$. Como $a'_0 = 20$ y $a''_0 = 0$ entonces $a_0 = 20$ y $a_1 = 20$, de donde

$$\begin{cases} 20 = \alpha + \beta + K/2 \\ 20 = -\alpha + 2\beta + K/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 40 = 3\beta + K \Rightarrow \beta = (40 - K)/3 \Rightarrow K = 40$$

Por lo tanto la opcin correcta es la **C)**

Ejercicio Mltiple Opcin 5: Un grupo de tres estudiantes compra una docena de bizcochos cada da. Todos quieren al menos un pan con grasa, y uno de ellos quiere solamente el pan con grasa y dos vigilantes. Si en la panadera hay solo cinco de tres tipo de bizcochos: pan con grasa, vigilantes y comunes salados. Cul es la menor cantidad de das que deben pasar para para que seguro se repita su pedido?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11**.**

Resolucin: Ser la cantidad de posibles elecciones ms uno. La cantidad de eleccin es la cantidad de soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$t.q. \quad 3 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 5.$$

que es equivalente a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

$$t.q. \quad 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 5.$$

que son todas las combinaciones de x_1 y x_2 que suman como mnimo 2 o sea $x_1x_2 \in \{02, 03, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23\}$, o sea 9. La respuesta es $9 + 1 = 10$.

Tambin se puede hacer por inclusin exclusin:

$$CR_7^3 - CR_4^3 - CR_3^3 - CR_1^3 + CR_0^3 =$$

$$= C_2^9 - C_2^6 - C_2^5 - C_2^3 + C_2^2$$

$$= 36 - 15 - 10 - 3 + 1 = 9.$$

O con f.g.: coeficiente de x^7 en

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^2+x^5)$$

$$= (1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x)^{-3}$$

coeficiente de x^7 de

$$(1 - x^3 - x^4 - x^6 + x^7) \sum_{n=0}^{\infty} CR_n^3 x^n$$

que es $CR_7^3 - CR_4^3 - CR_3^3 - CR_1^3 + -CR_0^3$, cuyo calculo ya hicimos.

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio de Desarrollo 1: Un juego de azar con dados tiene la siguiente estructura: Se tira un dado cinco veces de forma serial y se van sumando los resultados de las tiradas. Si en una cualquiera de las cinco tiradas se llegara a sacar un 6, dicha tirada queda invalidada (no se toma el resultado) y se exige tirar el dado nuevamente, de la cual se aceptar cualquier resultado, incluso el 6. El jugador gana si y solo si el resultado final es 11. Se quiere hallar la cantidad N de formas de ganar. Por ejemplo, una forma de ganar sera la sucesin: $1, 1, 1, 3, 5$ o la sucesin $1, 1, \mathbf{6}, 1, 3, 5$ o la sucesin $1, 1, \mathbf{6}, 6, \mathbf{6}, 1, 2$.

a) (1 pto.) Dar un argumento explicando porqu N es igual al coeficiente de x^6 en la funcin generatriz:

$$(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5.$$

b) (6 ptos.) Hallar N.

Resolucin: a) Tirar un dado es equivalente a elegir uno de los trminos $(x+x^2+x^3+x^2+x^5+x^6)$, pero como al salir 6 tiramos de nuevo, sera equivalente a $(x+x^2+x^3+x^2+x^5+x+x^2+x^3+x^2+x^5+x^6) = (2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6)$. Como se tira cinco veces y la suma de los exponentes es el puntaje, la cantidad ser el coeficiente de x^{11} de $(2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6)^5 = (2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+x^5)x^5$ que es el coeficiente de x^6 en $(2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+x^5)^5$

b)

$$(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5 = \left(2\frac{1-x^6}{1-x} - x^5\right)^5 = (2 - 2x^6 - x^5 + x^6)^5(1-x)^{-5} =$$

$$(2 - x^5 - x^6)^5 \sum_{n=0}^{\infty} CR^5_n x^n = (2^5 - 2^4x^5 - 2^4x^6 + \text{trminos de orden mayor que } x^6) \sum_{n=0}^{\infty} CR^5_n x^n$$

cuyo coeficiente en x^6 es $2^5CR^5_6 - 2^4CR^5_1 - 2^4CR^5_0 = 2^5C^{10}_4 - 2^4\cdot 5 - 2^4\cdot 1 = 32\cdot 10\cdot 9\cdot 2\cdot 7 - 16\cdot 6 - 16 = 16\cdot 7(2\cdot 10\cdot 9\cdot 2\cdot 7 - 1) = 112\cdot(360-1) = 112\cdot 239 = 40\,208$.

Ejercicio de Desarrollo 2:

a)(3 ptos.) Demostrar la frmula de Stifel:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

b)(5 ptos.) Demostrar por induccin en m la frmula del binomio:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n,$$

donde asumimos que $x^0 = 1$ por definicin. **Resolucin**: a) Argumento combinatorio: Todas las maneras de elegir n objetos de entre m, podemos distinguir aquellas que eligen entre sus elementos al primero de todos o no lo eligen. La formas de elegir n incluyendo el primero son $\binom{n-1}{n-1}$, mientras que las maneras de elegir n sin el primero son $\binom{n-1}{n}$. Por la regla de la suma sale la igualdad.

Argumento algebraico:

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!}$$

$$= (m-1)!\left(\frac{1}{n!(m-n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!(m-n))!}\right) = (m-1)!\frac{(m-n)+n}{n!(m-n)!} = (m-1)!\frac{m}{n!(m-n)!}$$

$$= \frac{(m-1)!m}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

b) Caso base $(1+x)^0 = 1$ y $\sum_{n=0}^{0} \binom{m}{n} x^n = \binom{m}{0} x^0 = 1$ Paso inductivo:

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \underset{HI}{=} (1+x)\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n + x\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n + \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n + \sum_{n=1}^{m+1}\binom{m}{n-1}x^n = \binom{m}{0}x^0 + \sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}x^n + \binom{m}{m}x^{m+1} + t\sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n-1}x^n$$

$$= 1 + x^{m+1} + \sum_{n=1}^{m}\left(\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}\right)x^n \underset{a)}{=} \binom{m+1}{0}x^0 + \binom{m+1}{m+1}x^{m+1} + \sum_{n=1}^{m}\binom{m+1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{m+1}\binom{m+1}{n}x^n$$

Aclaraciones hechas en durante el parcial: $\mathcal{P}\{1,2,\ldots,6\}$ es el conjunto de partes de $\{1,2,\ldots,6\}$ o sea $\{S : S \subset \{1,2,\ldots,6\}\}$.

Ejercicio MO3, donde dice “no dejan dos letras juntas” debera decir “no dejan dos letras iguales juntas”.

Ejercicio MO4, “estable” significa “acotada”.

Inicialmente (no hay perodo), hay 20 cebollitas inmaduras, y luego del primer perodo, las mismas maduran. Las maduras siguen generando dos cebollitas por perodo.

Ejercicio MO5 en la panadera hay cada vez cinco bizcochos de cada tipo.