Escribo esto porque me tope con el ejercicio y la solución no me daba de ninguna manera entonces quise poner a consideración de todos mi razonamiento. Por favor digame si encuentran el error en mis calculos y si la solución está bien o yo. El ejercicio dice "Se tira un dado 6 veces. Calcule la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas"

Si yo no entiendo mal tenemos 6 sumandos y la suma tiene que ser múltiplo de 18. Osea:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = \dot{18}$$

con $0 < x_i \leq 6$ y la negación de esto es $\neg x_i \leq 6 = x_i > 6$ osea $x_i \geq 7$ Ahora como son dados el máximo valor por tirada es 6 y el mayor valor que puede alcanzar la suma es 36. Entonces entre 6 el menor valor y 36 tenemos dos múltiplos de 18 que es 18 mismo y 36 mismo que es 18×2 Entonces tenemos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 18 \quad o \quad 36$$

Para usar el principio de inclusión-exclusión primero tenemos que acomodar las ecuaciones, como x_i es mayor estricto que cero debemos restar por cada una de las variables un 1 quedando

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 12 \quad o \quad 30$$

El número sin restricciones es $N = CR_{12}^{6} + CR_{30}^{6} = C_{12}^{17} + C_{30}^{35}$ Definimos las condiciones:

$$c_i = x_i \geq 7$$

Entonces lo que buscamos es

$$N(\overline{x_1}\overline{x_2}\ldots\overline{x_6}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 + \cdots$$

para las dos ecuaciones.

$$S_1 = \sum_{i=1}^{6} N(x_i)$$

y dado que todos los $N(x_i)$ son iguales es fácil de calcular. Veamos:

$$N(c_1) \Rightarrow (x_1 - 7) + \sum_{i=2}^{6} x_i = 5 \; o \; 30$$

Y esto es $CR_5^6 = C_5^{10}$ ó $CR_{30}^{6} = C_{30}^{35}$ por lo que hay que sumarlos entonces

$$S_1 = 6 \times (C_5^{10} + C_{30}^{35})$$

Para la primera ecuación osea la que está igualada a 12 no hay S_2 pues si restamos dos veces 7 nos queda un número negativo, sin embargo para la segunda ecuación si tenemos S_2, lo voy a hacer rápidamente por que ya mostré el punto que quería mostrar.

$$N(c_i c_j) = x_1 + \cdots + (x_i - 7) + \cdots + (x_j - 7) + \cdots + x_6 = 16$$

Que tiene como resultado C_{16}^{21} y hay C_2^6 de estas configuraciones. por lo que $S_2 = C_{16}^{21} \times C_2^6$. Para S_3 el procedimiento es extremadamente similar dando $S_3 = C_9^{14} \times C_3^6$ y $S_4 = C_2^7 \times C_4^6$. Finalmente la solución, es:

$$N(\overline{x_1}\overline{x_2}\ldots\overline{x_6}) = C_{12}^{17} + C_{30}^{3}5 - 6 \times (C_5^{10} + C_{30}^{35}) + C_{16}^{21} \times C_2^6 - C_9^{14} \times C_3^6 + C_2^7 \times C_4^6$$

La solución dice:

$$C_{12}^{17} - 6C_6^{11} + C_2^6 + 1$$