

Resolución de los ejercicios de Matemática Discreta primer semestre del 2018. Versión 0.8

José Javier Rama Morales // jjrama@gmail.com

31 de marzo de 2018

1. Practico 1

Ejercicio 1.1. Demuestre que $7^n - 2^{2^n}$ es divisible por 5 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Primero hacemos el **Paso base**: $n = 0$

$$7^0 - 2^0 = 0 = \dot{5}$$

que se cumple claramente.

Procedemos con la **Hipótesis inductiva**:

$$\exists m : 7^m - 2^m = \dot{5}$$

Tesis inductiva; si cumple que si la hipótesis se cumple entonces

$$7^{m+1} - 2^{m+1} = \dot{5}$$

Demostración: Lo que hago es sacar un 7 de factor y convertirlo en $5 + 2$ y sacar un factor de 2^{m+1} y luego sacar factor común un 2 el termino que estaba en la hipótesis inductiva y el otro termino me queda multiplicado por 5 por lo que es múltiplo de 5.

$$7^{m+1} - 2^{m+1} = 7(7^m) - 2(2^m) = (5 + 2)(7^m) + 2(2^m) = \underbrace{2 \times (7^m - 2^m)}_{\dot{5}} + \underbrace{5 \times 7^m}_{\dot{5}} = \dot{5}$$

□

Ejercicio 1.2. Encuentre y demuestre cuales naturales n pueden expresarse como al suma de terces y/o cincos, es decir:

$$\exists i, j \in \mathbb{N} : n = 3i + 5j \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{y} \quad n, n_0 \in \mathbb{N}$$

Base inductiva, no lo vamos a hacer aca, lo dejamos a discreción del lector pero esta igualdad se cumple para $n_0 = 8$ Veamoslo

$$3 \times 1 + 5 \times 1 = 8$$

Hipótesis inductiva; dado un natural $m \geq n_0$ se debe de cumplir que $\exists i, j : m = 3i + 5j$

Tesis inductiva: deben de existir $i', j' : m + 1 = 3(i') + 5(j')$.

Demostración Podemos poner $i' = i + 2$ y $j' = j - 1$, luego haciendo cuentas:

$$m + 1 = 3(i + 2) + 5(j - 1) = (3i + 6) + (5j - 5) = \underbrace{3i + 5j}_{m} + 1 = m + 1$$

Dado que $j' = j - 1$ si $j = 0$ entonces j' podría ser negativo. Veamos que eso no es posible para $m > 8$. Tenemos que $3i + 5j + 1 = m + 1$, despejando tenemos que $5j = 5 + 3(i + 1)$, en el peor de los casos $i = 0$ en cuyo caso $j = 1$. □

Ejercicio 1.3. Demuestre por inducción completa que $10^{n+1} + 10^n + 5 = 9 \forall n \in \mathbb{N}$

Este ejercicio va en la misma línea de los anteriores así que lo resolveremos rápidamente.

Paso base $n = 0$

$$10 + 3 + 5 = 18 = 9 \times 2$$

Hipótesis inductiva

$$\exists m : 10^{m+1} + 10^m + 5 = 9$$

Tesis inductiva, si se cumple la hipótesis entonces se debe de cumplir que:

$$10^{m+2} + 3 \times 10^{m+1} + 5 = 9$$

Demostración Empezamos a manipular los factores de manera conveniente como hicimos en los ejercicios anteriores:

$$\begin{aligned} 10 \times 10^{m+1} + 3 \times 10 \times 10^m + 5 &= \underbrace{10}_{9+1} (10^{m+1} + 3 \times 10^m) + 5 \\ &= \underbrace{9(10^{m+1} + 3 \times 10^m)}_9 + \underbrace{10^{m+1} + 10^m + 5}_{9 \text{ Por Hipotesis}} = 9 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.4. Sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conjeturar una fórmula para A^n y demostrarla.

Lo primero que hacemos es multiplicarla por ella misma varias veces hasta deducir un patrón:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La fórmula que podemos conjeturar es:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \sum_{i=1}^{n-1} i \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la demostración es tan directa como multiplicarla por A y ver que se verifica, no lo haremos acá. Les recomiendo usar el software SAGE para todas estas cuentas engorrosas ya que no agregan nada a el nivel de matemática ni la capacidad de hacer inducción completa, es mas pienso que este ejercicio debería ser eliminado del practico. □

Ejercicio 1.5. 1. Demuestre la siguiente igualdad: $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

2. Probar que $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(\sum_{i=1}^n i)^2 = \sum_{i=1}^n i^3$.

1) Bueno estos ejercicios hay que remangarse las manos y hacer cuentas tediosas hasta mas no poder. Vamos a empezar por la **Base inductiva**.

$$1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

Se cumple. **La hipótesis inductiva** debería decir algo como:

$$\exists m : \sum_{i=1}^m = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Y la tesis inductiva:

$$\sum_{i=1}^{m+1} = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6}$$

Demostración: Descomponemos la suma en:

$$\sum_{i=1}^m i^2 + (m+1)^2$$

y el primer termino es el de la hipótesis inductiva por lo que tenemos:

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6}$$

Igualdad a probar que probaría la inducción. Del lado izquierda después de hacer cuatro veces las cuentas me quedo:

$$\frac{2m^3 + 9m^2 + 13m + 6}{6}$$

y para sorpresa de nadie porque sino no estaría en el practico del lado derecho queda:

$$\frac{2m^3 + 9m^2 + 13m + 6}{6}$$

Por lo que ambos lados son iguales probando la igualdad y probando la inducción. \square

2) Este es sencillo si te das cuenta del truco para hacerlo sino puedes pasarte una tarde haciendo cuentas como me paso a mi. Veamos el **Paso inductivo**: queda simplemente $1 = 1$. por lo que se cumple.

Vallamos a la **Hipótesis inductiva**:

$$\exists m : \left(\sum_{i=1}^m i \right)^2 = \sum_{i=1}^m i^3$$

Como siempre asumimos que eso es verdad y vamos al paso siguiente. Para $m+1$:

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1} i \right)^2 = \sum_{i=1}^{m+1} i^3$$

Demostración:

Descomponemos ambas sumas:

$$\left(\sum_{i=1}^m i + (m+1) \right)^2 = \sum_{i=1}^m i^3 + (m+1)^3$$

Entonces del lado izquierdo tenemos el cuadrado de un binomio, hagámoslo.

$$\left(\sum_{i=1}^m i \right)^2 + 2(m+1) \left(\sum_{i=1}^m i \right) + (m+1)^2$$

Juntando ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\left(\sum_{i=1}^m i \right)^2 + 2(m+1) \left(\sum_{i=1}^m i \right) + (m+1)^2 = \sum_{i=1}^m i^3 + (m+1)^3$$

Usando la hipótesis inductiva cancelamos los términos $(\sum_{i=1}^m i)^2$ con $\sum_{i=1}^m i^3$ quedando

$$2(m+1) \left(\sum_{i=1}^m i \right) + (m+1)^2 = (m+1)^3$$

Ahora usamos la sugerencia del ejercicio que es usar la identidad:

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$$

quedando

$$m(m+1)(m+1) + (m+1)^2 = (m+1)^3$$

Del lado izquierdo sacamos de factor común $(m+1)^2$:

$$(m+1)^3 = (m+1)^3$$

Lo que prueba la igualdad y la inducción.

□

Ejercicio 1.6. Sea m el menor natural que verifica que $2^m > m^2 + 1$. Halle m y pruebe por inducción completa que si $n \geq m$ entonces $2^n > n^2 + 1$.

El primer número que verifica esta desigualdad es el número 5. Hagamos la **Base inductiva** con este número:

$$2^5 > 5^2 + 1 \Rightarrow 32 > 26$$

Se cumple por lo tanto podemos proceder a la inducción.

Hipótesis inductiva:

$$\exists n : 2^n > n^2 + 1$$

y por lo tanto la tesis inductiva sera:

$$2^{n+1} > (n+1)^2 + 1 \quad (1)$$

Demostración

Primero veamos una desigualdad que nos sera útil

$$2m^2 + 2 > m^2 + 2m + 2$$

Pues

$$m^2 + m^2 > m^2 + 2m + 2$$

donde una m^2 se cancela y me queda $m^2 > 2m + 2$ y esto se cumple $\forall n > 5, n \in \mathbb{N}$ Luego:

$$2^{m+1} = 2^m + 2^m > (m^2 + 1) + (m^2 + 1) > 2m^2 + 2 > m^2 + 2m + 2$$

Donde el último termino es el cuadrado del binomio de la derecha de la desigualdad (-1-) mas la unidad correspondiente. Por lo tanto queda probada la desigualdad para todo natural mayor que 5 por inducción completa. \square

Ejercicio 1.7. Demuestre que en la lista de inscriptos al curso de Matemática Discreta I, 2018, hay una cantidad par de estudiantes que tienen una cantidad impar de amigos inscriptos e el mismo curso.

La demostración de esta premisa por inducción completa no me la sé mas que como un cuento, carezco de las herramientas mas formales para demostrarlo con cuantificadores, pero tengo una buena demostración.

Paso Base: Si hay dos estudiantes o bien son amigos o no, entonces si son amigos tienen un amigo cantidad impar, si no son amigos también tiene una cantidad impar de amigos por no tener cantidad par.

Hipótesis inductiva Sea n la cantidad de estudiantes. La hipótesis es que se cumple para $n - 1$ y n . **Tesis inductiva** Se cumple para $n + 1$ estudiantes. **Demostración** Por hipótesis en las n personas hay una cantidad par de ellas que tienen una cantidad impar de amigos inscriptos. Al agregar una persona al curso hay dos posibilidades:

1. El nuevo tiene $2k$ amigos en el curso, entonces una cantidad par de personas cambiaron la paridad de amigos. Los que tienen una cantidad par de amigos van a ser aquellos amigos que tenían una cantidad impar de amigos mas los que no son amigos de esta persona en total cambiaron de paridad $2k$ personas, luego los que tienen una cantidad impar de amigos sigue siendo una número par.
2. El nuevo tiene una cantidad impar de amigos en el curso. Entonces $2k + 1$ personas cambiaron su paridad de amigos, MÁS el nuevo, entonces cambiaron de paridad $2k + 2$. Lo que conlleva a que siga habiendo una cantidad par de alumnos con cantidad impar de amigos.

\square

Ejercicio 1.8. Sean $f(x) = xe^x$ y $g(x) = 1/x$, demuestre las siguientes desigualdades para las derivadas n -ésimas:

$$f^{(n)}(x) = e^x(x+n) \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Base Inductiva $g'(x) = (x^{-1})' = -1(x^{-2})$

Hipótesis inductiva:

$$\exists m : g^{(m)}(x) = (-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}}$$

Tesis inductiva y Demostración: Si derivó nuevamente:

$$g^{(m+1)}(x) = (-1)^{m+1} \frac{(m+1)m!}{x^{m+2}}$$

Cumpléndose la tesis, quedando demostrada la inducción. \square

Ejercicio 1.9. Para $n \in \mathbb{N}$ sea S un subconjunto de números reales con $|S| = 2^n$. Demuestre que el número de comparaciones necesarias para ordenarlo en forma ascendente a los elementos de S es menor igual a $n \times 2^n$.

Ejercicio 1.10. Demuestre que:

1. $n^3 - n$ es divisible por 3 $\forall n \in \mathbb{N}$
2. La suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible por 9

1)

Base Inductiva

- $n = 1$, resulta en 0 que no es divisible entre tres¹
- $n = 2$, $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ que si es divisible entre tres.

Hipótesis inductiva $\exists m : m^3 - m$ es divisible entre tres.

Tesis inductiva Se cumple para $m + 1$, es decir $(m + 1)^3 - (m + 1)$ es divisible entre tres.

Demostración $(m + 1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$

sustituyendo queda:

$$m^3 + 3m^2 + \underbrace{2}_{3-1} m$$

Haciendo distributiva con el 2 cambiado por 3 - 1 queda:

$$\underbrace{(m^3 - m)}_{\text{divisible entre tres por hipotesis}} + 3(m^2 + m)$$

y el ultimo termino es claramente divisible entre tres por ser múltiplo de el. \square

2) **Base Inductiva**

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

Claramente divisible entre tres.

Hipótesis Inductiva

$$\exists m : (m)^3 + (m + 1)^3 + (m + 2)^3$$

es divisible entre 9.

Tesis inductiva Dada la hipótesis se cumple que:

$$(m + 1)^3 + (m + 2)^3 + (m + 3)^3$$

¹De esto no estoy seguro

es divisible entre 9

Demostración

Podemos sumar y restar (m^3) quedando:

$$\underbrace{m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3}_{\text{es divisible entre 9 por hipotesis}} - m^3 + (m+3)^3$$

Lo que resta ver es si $-m^3 + (m+3)^3$ es divisible entre 9. Manipulemos: $(m+3)^3 - m^3 = (m+3-m)((m+3)^2 + (m+3)m + m^2) = 3(m^2 + 6m + 9 + m^2 + 3m + m^2) = 9(m^2 + 2m + 3)$ Claramente divisible entre 9. \square

Ejercicio 1.11. Demuestre que todo natural n puede expresarse como la suma de cinco y/o siete siempre que n sea mayor o igual a 24, es decir $\forall n \geq 24 \exists i, j \in \mathbb{N} : n = 5i + 7j$.

Base inductiva

$$n = 24 \Rightarrow (i = j = 2) \Rightarrow 10 + 14 = 24$$

Hipótesis inductiva

$$\exists \forall m \geq 24, i, j : m = 5i + 7j \text{ con } i, j \in \mathbb{N}$$

Tesis Inductiva Si se cumple la Hipótesis, entonces se cumple que:

$$\text{para } m+1 \exists i', j' : m+1 = 5i' + 7j'$$

Demostración

$$m+1 = 5(i-4) + 7(j-3) = 5i - 20 + 7j + 21 = 5i + 7j + 1 = m+1$$

Entonces $i' = i - 4$ y $j' = j - 3$. Aquí estamos usando la inducción fuerte pues estamos usando como hipótesis mas que el inmediatamente anterior. Y todo esto funciona pues $5 \times 4 < 24$ \square

Ejercicio 1.12. Demuestre que si:

$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3}$$

y $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$, entonces $a_n \geq 3^n$ para todo $n \geq 4$.

Base Inductiva

$$a_4 = 2 \times 30 + 7 \times 10 + 3 = 133 \geq 3^4 = 81$$

Hipótesis inductiva

$$\exists m : a_i \geq 3^m \text{ para } i = m-1, m-2, m-3, \dots, 4$$

Tesis Inductiva

Se cumple para $i = m$.

Demostración

$$\begin{aligned} 2a_{m-1} &\geq 2 \times 3^{m-1} \\ 7a_{m-2} &\geq 7 \times 3^{m-2} \\ a_{m-3} &\geq 3^{m-3} \\ &= \\ 2a_{m-1} + 7a_{m-2} + a_{m-3} &\geq 3^{m-3} \times 40 \geq 3^{m-3} \times 27 = 3^m \end{aligned}$$

En conclusión se cumple con $a_m \geq 3^m$ \square

¹¹Aquí vamos a hacer uso de la identidad $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

Ejercicio 1.13. Se define

$$S_n = \sum_{i=1}^n i!i$$

para todo $n \geq 1$. Demuestre que $S_n = (n + 1)! - 1$

Base inductiva

$$S_0 = 0!0 = 0 = (0 + 1)! - 1 = 0$$

Hipótesis inductiva

$$\exists m : S_m = (m + 1)! - 1$$

Tesis inductiva

Dada la hipótesis se cumple:

$$S_{m+1} = (m + 2)! - 1$$

Demostración

$$S_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} i!i = (m + 2)! - 1 \Rightarrow \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m i!i + (m + 1)!(m + 1) = (m + 2)! - 1 \Rightarrow \quad (3)$$

$$(m + 1)! - 1 + (m + 1)!(m + 1) = (m + 2)! - 1 \Rightarrow \quad (4)$$

$$(m + 1)! \times (m + 2) = (m + 2)! \Rightarrow \quad (5)$$

$$(m + 2)! = (m + 2)! \quad (6)$$

En la ecuación 2 simplemente planteamos lo que podría ser la igualdad por eso el signo de interrogación, por que aún no sabemos si es cierta. En la ecuación 3 descomponemos la sumatoria del lado izquierdo desde 1 hasta m y el siguiente termino. En la ecuación 4 sustituimos la hipótesis de la inducción y luego cancelamos el número -1 que está de los dos lados de la igualdad restando. En la ecuación 5 sacamos de factor común del lado izquierdo a $(m + 1)!$, y por último verificamos la igualdad en 6, demostrando la igualdad inicial, y por tanto demostrando la inducción. \square

Ejercicio 1.14. Considere un tablero cuadrado de 2^n cuadrados por lado al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demuestre que se puede cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos cada una.

Base inductiva

Tenemos cuadrados de 2×2 o sea 4 subcuadrados, de los cuales falta uno, cualquiera que falte, podemos cubrir los 3 restantes con una ficha en L , de tres subcuadrados.

Hipótesis Inductiva

Se cumple para tableros de $2^n \times 2^n$

Tesis inductiva

Dada la hipótesis se cumple para tableros de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$

Demostración

Tomo cuatro cuadrados de 2^n , entonces cada uno se puede cubrir con con fichas L dejando un cuadradito libre. Pongo 3 de los agujeros en el centro y dejo uno en algún lado. Con una pieza en L cubro el agujero en el centro y el otro agujero pertenece a un tablero de $2^n \times 2^n$ que por hipótesis se puede cubrir. \square

Ejercicio 1.15. La sucesión de Fibonacci e define recursivamente del siguiente modo:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad y \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Pruebe que:

$$1. \sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

$$2. \sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$$

$$3. \sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

1) **Base inductiva**

Lo probamos para $n = 1$:

$$\sum_{i=0}^1 F_i = 0 + 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Por lo que se cumple la base inductiva.

Hipótesis inductiva

$$\exists m : \sum_{i=0}^m F_i = F_{m+2} - 1$$

Tesis inductiva

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+1} F_i &= F_{m+3} - 1 \\ \sum_{i=0}^m F_i + F_{m+1} &= F_{m+3} - 1 \\ \underbrace{F_{m+2} + F_{m+1} - 1}_{F_{m+3}} &= F_{m+3} - 1 \end{aligned}$$

Lo que hicimos fue descomponer la suma sacándole el último término y luego sustituirlo por la hipótesis inductiva. Llegando a la igualdad deseada. \square

2)

Base inductiva Para $n = 1$ tenemos

$$F_1 \times F_0 + F_2 \times F_1 = 1$$

y

$$F_2^2 = 1^2 = 1$$

por lo tanto se cumple la base inductiva.

Hipótesis inductiva

$$\exists m : \sum_{i=1}^{2m} F_i F_{i-1} = F_{2m}^2$$

Tesis inductiva Si se cumple la hipótesis entonces se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{2(m+1)} F_i F_{i-1} = F_{2(m+1)}^2$$

Ahora descompongo la suma de la izquierda en $2m, 2m + 1, 2m + 2$

$$\sum_{i=0}^{2m} F_i F_{i-1} + F_{2m+1} F_{2m} + F_{2m+2} F_{2m+1}$$

por hipótesis el primer termino es igual a F_{2m}^2 , luego saco factor común F_{2m+1} y queda

$$F_{2m}^2 + F_{2m+1}(F_{2m} + F_{2m+2})$$

Usando que $F_{2m+2} = F_{2m+1} + F_{2m}$ Sustituyo y:

$$F_{2m}^2 + F_{2m+1}(F_{2m} + F_{2m+1} + F_{2m}) = F_{2m}^2 + F_{2m+1}(2F_{2m} + F_{2m+1})$$

Luego hago distributiva:

$$F_{2m}^2 + 2F_{2m+1}F_{2m} + F_{2m+1}^2 = (F_{2m} + F_{2m+1})^2 = F_{2m+2}^2$$

Completando así la demostración. \square

3)

Base inductiva Para $n = 1$ tenemos

$$1 = \vec{F}_1 = F_1 F_2 = 1$$

Por lo tanto se cumple.

Hipótesis inductiva

$$\exists m : \sum_{i=1}^m F_i^2 = F_m F_{m+1}$$

Tesis Inductiva Si la hipótesis es cierta tengo que:

$$\sum_{i=1}^{m+1} F_i^2 = F_{m+1} F_{m+2}$$

Descomponemos la sumatoria desde $i = 1$ hasta $i = m$ y nos queda un termino sobrante, luego saco factor común F_{m+1}

$$\sum_{i=1}^m F_{m+1}^2 = F_m F_{m+1} + F_{m+1}^2 = F_{m+1}(F_m + F_{m+1}) = F_{m+1} F_{m+2}$$

Lo que implica la igualdad de ambos lados. Completando así la demostración. \square

Ejercicio 1.16. Se considera la función f definida sobre $\mathbb{R} - \{-2/3\}$ por:

$$f(x) = \frac{1}{3x + 2}$$

Demuestre que la derivada n -ésima de f es:

$$f^{(n)}(x) = \frac{3(-1)^n n!}{(3x + 2)^{n+1}}$$

Base Inductiva Usando la regla de la cadena derivamos una vez y obtenemos:

$$f'(x) = 3(-1) \times 1(3x + 2)^{-2}$$

Cumpliendo la base.

Hipótesis inductiva

$$\exists m : f^{(m)}(x) = 3(-1)^m m!(3x + 2)^{-(m+1)}$$

Tesis inductiva

En condiciones de la hipótesis se cumple que:

$$f^{(m+1)}(x) = 3(-1)^{m+1} (m + 1)m!(3x + 2)^{-(m+2)}$$

Derivando usando la regla de la cadena obtenemos simplemente lo buscado. \square