Resolución de los ejercicios de Matemática Discreta primer semestre del 2018. Versión 0.1

José Javier Rama Morales

5 de marzo de 2018

1. Practico 1

Ejercicio 1.1. *Demuestre que* $7^n - 2^2$ *es divisible por* 5 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Primero hacemos el **Paso base**: $n = 0$
$$7^0 - 2^0 = 0 = \dot{5}$$
que se cumple claramente.

Procedemos con la **Hipótesis inductiva**:
$$\exists m : 7^m - 2^m = \dot{5}$$
Tesis inductiva; si cumple que si la hipótesis se cumple entonces
$$7^{m+1} - 2^{m-1} = \dot{5}$$
Demostración: Lo que hago es sacar un 7 de factor y convertirlo en $5 + 2$ y sacar un factor de 2^{m+1} y luego sacar factor común un 2 el termino que estaba en la hipótesis inductiva y el otro termino me queda multiplicado por 5 por lo que es múltiplo de 5.
$$7^{m+1} - 2^{m-1} = 7(7^m) - 2(2^m) = (5+2)(7^m) + 2(2^m) = \underbrace{2 \times (7^m - 2^m)}_{\dot{5}} + \underbrace{5 \times 7^m}_{\dot{5}} = \dot{5}$$

□

Ejercicio 1.2. *Encuentre y demuestre cuales naturales* n *pueden expresarse como al suma de terses y/o cincos, es decir:*
$$\exists i, j \in \mathbb{N} : n = 3i + 5j \quad \forall n \geq n_0 \quad y \quad n, n_0 \in \mathbb{N}$$

Base inductiva, no lo vamos a hacer aca, lo dejamos a discreción del lector pero esta igualdad se cumple para $n_0 = 8$ Veamoslo
$$3 \times 1 + 5 \times 1 = 8$$
Hipótesis inductiva; dado un natural $m \geq n_0$ se debe de cumplir que $\exists i, j : m = 3i + 5j$
Tesis inductiva: deben de existir $i', j' : m + 1 = 3(i') + 5(j')$.
Demostración Podemos poner $i' = i + 2$ y $j' = j - 1$, luego haciendo cuentas:
$$m + 1 = 3(i+2) + 5(k+1) = (3i+6) + (5j-5) = \underbrace{3i + 5j}_{m} + 1 = m + 1$$

□

Ejercicio 1.3. *Demuestre por inducción completa que* $10^{n+1}+10^n+5=\dot{9}\forall n\in\mathbb{N}$

Este ejercicio va en la misma linea de los anteriores así que lo resolveremos rápidamente.

Paso base $n=0$

$$10+3+5=18=9\times 2$$

Hipótesis inductiva

$$\exists m : 10^{m+1}+10^m+5=\dot{9}$$

Tesis inductiva, si se cumple la hipótesis entonces se debe de cumplir que:

$$10^{m+2}+3\times 10^{m+1}+5=\dot{9}$$

Demostración Empezamos a manipular los factores de manera conveniente como hicimos en los ejercicios anteriores:

$$10\times 10^{m+1}+3\times 10\times 10^m+5=\underbrace{10}_{9+1}(10^{m+2}+3\times 10^{m+1})+5$$

$$\underbrace{9(10^{m+1}+3\times 10^m)}_{\dot{9}}+\underbrace{10^{m+1}+10^m+5}_{\dot{9}\ \ Por\ \ Hipótesis}=\dot{9}$$

□

Ejercicio 1.4. *Sea:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conjeturar una formula para A^n *y demostrarla.*

Lo primero que hacemos es multiplicarla por ella misma varias veces hasta deducir un patrón:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^4=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^6=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formula que podemos conjeturar es:

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \sum_{i=1}^{n-1} i \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la demostración es tan directa como multiplicarla por A y ver que se verifica, no lo haremos aca. Les recomiendo usar es software SAGE para todas estas cuentas engorrosas ya que no agregan nada a el nivel de matemática ni la capacidad de hacer inducción completa, es mas pienso que este ejercicio debería ser eliminado del practico. □

Ejercicio 1.5. *1. Demuestre la siguiente igualdad:* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

2. Probar que $\geq 1\, n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

1) Bueno estos ejercicios hay que remangarse las manos y hacer cuentas tediosas hasta mas no poder. Vamos a empezar por la **Base inductiva**.

$$1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

Se cumple. **La hipótesis inductiva** debería decir algo como:

$$\exists m : \sum_{i=1}^{m} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Y la tesis inductiva:

$$\sum_{i=1}^{m+1} = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6}$$

Demostración: Descomponemos la suma en:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 + (m+1)^2$$

y el primer termino es el de la hipótesis inductiva por lo que tenemos:

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6}$$

Igualdad a probar que probaría la inducción. Del lado izquierda después de hacer cuatro veces las cuentas me quedo:

$$\frac{2\,m^3 + 9\,m^2 + 13\,m + 6}{6}$$

y para sorpresa de nadie porque sino no estaría en el practico del lado derecho queda:

$$\frac{2\,m^3 + 9\,m^2 + 13\,m + 6}{6}$$

Por lo que ambos lados son iguales probando la igualdad y probando la inducción.

2) Este es sencillo si te das cuenta del truco para hacerlo sino podes pasarte una tarde haciendo cuentas como me paso a mi. Veamos el **Paso inductivo:** queda simplemente $1 = 1$. por lo que se cumple.

Vallamos a la **Hipótesis inductiva:**

$$\exists m : \left(\sum_{i=1}^{m} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} i^3$$

Como siempre asumimos que eso es verdad y vamos al paso siguiente. Para $m+1$:

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m+1} i^3$$

Demostración:
Descomponemos hambas sumas:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} i + (m+1)\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} i^3 + (m+1)^3$$

Entonces del lado izquierdo tenemos el cuadrado de un binomio, hagámoslo.

$$\left(\sum_{i=1}^{m} i\right)^2 + 2(m+1)\left(\sum_{i=1}^{m} i\right) + (m+1)^2$$

Juntando ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} i\right)^2 + 2(m+1)\left(\sum_{i=1}^{m} i\right) + (m+1)^2 = \sum_{i=1}^{m} i^3 + (m+1)^3$$

Usando la hipótesis inductiva cancelamos los términos $(\sum_{i=1}^{m} i)^2$ con $\sum_{i=1}^{m} i^3$ quedando

$$2(m+1)\left(\sum_{i=1}^{m} i\right) + (m+1)^2 = (m+1)^3$$

Ahora usamos la sugerencia del ejercicio que es usar la identidad:

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$$

quedando

$$m(m+1)(m+1) + (m+1)^2 = (m+1)^3$$

Del lado izquierdo sacamos de factor común $(m+1)^2$:

$$(m+1)^3 = (m+1)^3$$

Lo que prueba la igualdad y la inducción.

□

Ejercicio 1.6. *Sea m el menor natural que verifica que $2^m > m^2 + 1$. Halle m y pruebe por inducción completa que si $n \geq m$ entonces $2^n > n^2 + 1$.*

El primer número que verifica esta desigualdad es el número 5. Hagamos la **Base inductiva** con este numero:

$$2^5 > 5^2 + 1 \quad \Rightarrow 32 > 26$$

Se cumple por lo tanto podemos proceder a la inducción. **Hipótesis inductiva:**

$$\exists n : 2^n > n^2 + 1$$

y por lo tanto la tesis inductiva sera:

$$2^{n+1} > (n+1)^2 + 1 \tag{1}$$

Demostración
Primero veamos una desigualdad que nos sera útil

$$2m^2 + 2 > m^2 + 2m + 2$$

Pues

$$m^2 + m^2 > m^2 + 2m + 2$$

donde una m^2 se cancela y me queda $m^2 > 2m + 2$ y esto se cumple $\forall n > 5, \quad n \in \mathbb{N}$ Luego:

$$2^{m+1} = 2^m + 2^m > (m^2 + 1) + (m^2 + 1) > 2m^2 + 2 > m^2 + 2m + 2$$

Donde el último termino es el cuadrado del binomio de la derecha de la desigualdad (-1-) mas la unidad correspondiente. Por lo tanto queda probada la desigualdad para todo natural mayor que 5 por inducción completa. □

Ejercicio 1.7. *Demuestre que en la lista de inscriptos al curso de Matemática Discreta I, 2017, hay una cantidad de estudiantes que tienen una cantidad impar de amigos inscriptos e el mismo curso.*

La demostración de esta premisa por inducción completa no me la sé mas que como un cuento, carzco de las herramientas mas formales para demostrarlo con cuantificadores, pero tengo una buena demostración.

Paso Base: Si hay dos estudiantes o bien son amigos o no, entonces si son amigos tienen un amigo cantidad impar, si no son amigos también tiene una cantidad impar de amigos por no tener cantidad par.
Hipótesis inductiva Tengo N nodos (alumnos) tal que hay una cantidad par que tiene una cantidad impar de amigos. Es decir cada uno de estos nodos esta conectado con otra cantidad impar de nodos.
Tesis inductiva:
Si agrego un nodo, el caso trivial es que no sea amigo de nadie, donde estaría probada la inducción. Otro de los casos se conecte con un nodo que tenia una cantidad impar de conexiones en ese caso el nuevo nodo tiene un solo amigo entonces hay una cantidad par de nodos con conexiones impares pues se fue uno de los nodos y se agrego otro. Si se conectara con n nodos donde n es par estaría en las hipótesis del problema por lo tanto se cumpliría la inducción, si se conecta con n impares habrá uno que ya no tenga cantidad de conexiones impares por lo tanto pares, completando todos los casos y demostrando la inducción.□

Ejercicio 1.8. *Sean $f(x) = xe^x$ y $g(x) = 1/x$, demuestre las siguientes desigualdades para las derivadas n-ésimas:*

$$f^{(n)}(x) = e^x(x+n) \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Haremos la segunda por que parece un insulto a nuestra inteligencia este ejercicio. Pero para tener completo el practico...
Base Inductiva $g'(x) = (x^{-1})' = -1(x^{-2})$
Hipótesis inductiva:

$$\exists m : g^{(m)}(x) = (-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}}$$

Tesis inductiva y Demostración: Si derivo nuevamente:

$$g^{(m+1)}(x) = (-1)^{m+1} \frac{(m+1)m!}{x^{m+2}}$$

Cumpliéndose la tesis, quedando demostrada la inducción. □

Ejercicio 1.9. *Para $n \in \mathbb{N}$ sea S un subconjunto de números reales con $|S| = 2^n$. Demuestre que el número de comparaciones necesarias para ordenarlo en forma ascendente a los elementos de S es menor igual a $n \times 2^n$.*

Ejercicio 1.10. *Demuestre que:*

1. *$n^3 - n$ es divisible por 3 $\forall\ n \in \mathbb{N}$*
2. *La suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible por 9*

1)
Base Inductiva

- $n = 1$, resulta en 0 que no es divisible entre tres[1]
- $n = 2$, $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ que si es divisible entre tres.

Hipótesis inductiva $\exists m : m^3 - m$ es divisible entre tres.

Tesis inductiva Se cumple para $m + 1$, es decir $(m + 1)^3 - (m + 1)$ es divisible entre tres.

Demostración $(m + 1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$
sustituyendo queda:

$$m^3 + 3m^2 + \underbrace{2}_{3-1} m$$

Haciendo distributiva con el 2 cambiado por $3 - 1$ queda:

$$\underbrace{(m^3 - m)}_{divisible\quad entre\quad tres\quad por\quad hipótesis} +3(m^2 + m)$$

y el ultimo termino es claramente divisible entre tres por ser múltiplo de el. □
2) **Base Inductiva**

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

Claramente divisible entre tres.
Hipótesis Inductiva

$$\exists m : (m)^3 + (m + 1)^3 + (m + 2)^3$$

es divisible entre 9.
Tesis inductiva Dada la hipótesis se cumple que:

$$(m + 1)^3 + (m + 2)^3 + (m + 3)^3$$

es divisible entre 9
Demostración
Podemos sumar y restar (m^3) quedando:

$$\underbrace{m^3 + (m + 1)^3 + (m + 2)^3}_{es\ divisible\ entre\ 9\ por\ hipótesis} -m^3 + (m + 3)^3$$

y haciendo cuentas (engorrosas) tenemos que $-m^3 + (m + 3)^3 = 9m^2 + 27m + 27$ que también claramente es divisible entre 9. □

[1] De esto no estoy seguro

Ejercicio 1.11. *Demuestre que todo natural n puede expresarse como la suma d cinco y/o sites siempre que n sea mayor o igual a 24, es decir* $\forall n \geq 24 \;\; \exists i, j \in \mathbb{N} : n = 5i + 7j$.

Base inductiva
$n = 24 \Rightarrow (i = j = 2) \Rightarrow 10 + 14 = 24$
Hipótesis inductiva

$$\exists \; \forall m \geq 24, \; i, j : m = 5i + 7j \; con \; i, j \in \mathbb{N}$$

Tesis Inductiva Si se cumple la Hipótesis, entonces se cumple que:

$$para \; m + 1 \; \exists \; i', j' : m + 1 = 5i' + 7j'$$

Demostración

$$m + 1 = 5(i - 4) + 7(j - 3) = 5i - 20 + 7j + 21 = 5i + 7j + 1 = m + 1$$

Entonces $i' = i - 4$ y $j' = j + 3$. Aquí estamos usando la inducción fuerte pues estamos usando como hipótesis mas que el inmediatamente anterior. Y todo esto funciona pues $5 \times 4 < 24$ □

Ejercicio 1.12. *Demuestre que si:*

$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3}$$

y $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$, *entonces* $a_n \geq 3^n$ *para todo* $n \geq 4$.

Base Inductiva

$$a_4 = 2 \times 30 + 7 \times 10 + 3 = 133 \geq 3^4 = 81$$

Hipótesis inductiva

$$\exists m : a_i \geq 3^m \; para \; i = m - 1, m - 2, m - 3, \ldots, 4$$

Tesis Inductiva
Se cumple para $i = m$.
Demostración

$$\begin{array}{rcl} 2a_{m-1} & \geq & 2 \times 3^{m-1} \\ 7a_{m-2} & \geq & 7 \times 3^{m-1} \\ a_{m-3} & \geq & 3^{m-1} \\ & = & \\ 2a_{m-1} + 7a_{m-2} + a_{m-3} & \geq & 3^{m-3} \times 40 \geq 3^{m-3} \times 27 = 3^m \end{array}$$

En conclusión se cumple con $a_m \geq 3^m$ □

Ejercicio 1.13. *Se define*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i!i$$

para todo $n \geq 1$. Demuestre que $S_n = (n+1)! - 1$

Base inductiva

$$S_0 = 0!0 = 0 = (0+1)! - 1 = 0$$

Hipótesis inductiva

$$\exists m : S_m = (m+1)! - 1$$

Tesis inductiva
Dada la hipótesis se cumple:

$$S_{m+1} = (m+2)! - 1$$

Demostración

$$S_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} i!i \quad =^{?} \quad (m+2)! - 1 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} i!i + (m+1)!(m+1) \quad =^{?} \quad (m+2)! - 1 \tag{3}$$

$$(m+1)! - 1 + (m+1)!(m+1) \quad =^{?} \quad (m+2)! - 1 \tag{4}$$

$$(m+1)! \times (m+2) \quad =^{?} \quad (m+2)! \tag{5}$$

$$(m+2)! \quad = \quad (m+2)! \tag{6}$$

En la ecuación 2 simplemente planteamos lo que podría ser la igualdad por eso el signo de interrogación, por que aún no sabemos si es cierta. En la ecuación 3 descomponemos la sumatoria del lado izquierdo desde 1 hasta m y el siguiente termino. En la ecuación 4 sustituimos la hipótesis de la inducción y luego cancelamos el número 1 que esta de los dos lados de la igualdad restando. En la ecuación 5 sacamos de factor común del lado izquierdo a $(m+1)!$, y por último verificamos la igualdad en 6, demostrando la igualdad inicial, y por tanto demostrando la inducción. $\square$

Ejercicio 1.14. *Considere un tablero cuadriculado de 2^n cuadrados por lado al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demuestre que se puede cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos cada una.*

Base inductiva
Tenemos cuadrados de 2×2 osea 4 subcuadrados, de los cuales falta uno, cualquiera que falte, podemos cubrir los 3 restantes con una ficha en L, de tres subcuadrados.
Hipótesis Inductiva
Se cumple para tableros de $2^n \times 2^n$
Tesis inductiva
Dada la hipótesis se cumple para tableros de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$
Demostración
Tomo cuatro cuadrados de 2^n, entonces cada uno se puede cubrir con con fichas L dejando un cuadradito libre. Pongo 3 de los agujeros en el centro y dejo uno en algún lado. Con una pieza en L cubro el agujero en el centro y el otro agujero pertenece a un tablero de $2^n \times 2^n$ que por hipótesis se puede cubrir. $\square$

Ejercicio 1.15. *La sucesión de Fibonacci e define recursivamente del siguiente modo:*

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \;\; y \;\; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Pruebe que:

1. $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n-2} - 1$
2. $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$
3. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

1)

Base inductiva

Lo probamos para $n = 1$:

$$\sum_{i=0}^{1} F_i = 0 + 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Por lo que se cumple la base inductiva.

Hipótesis inductiva

$$\exists m : \sum_{i=0}^{m} F_i = F_{m+2} - 1$$

Tesis inductiva

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m+1} F_i &= F_{m+3} - 1 \\
\sum_{i=0}^{m} F_i + F_{m+1} &= F_{m+3} - 1 \\
\underbrace{F_{n+2} + F_{n+1}}_{F_{n+3}} - 1 &= F_{n+3} - 1
\end{aligned}$$

Lo que hicimos fue descomponer la suma sacándole el último termino y luego sustituirlo por la hipótesis inductiva. Llegando a la igualdad desada. □

2)

Base inductiva Para $n = 1$ tenemos

$$F_1 \times F_0 + F_2 \times F_1 = 1$$

y

$$F_2^2 = 1^2 = 1$$

por lo tanto se cumple la base inductiva.
Hipótesis inductiva

$$\exists m : \sum_{i=1}^{2m} F_i F_{i-1} = F_{2m}^2$$

Tesis inductiva Si se cumple la hipótesis entonces se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{2(m+1)} F_i F_{i-1} = F_{2(m+1)}^2$$

Ahora descompongo la suma de la izquierda en $2m, 2m+1, 2m+2$

$$\sum_{i=0}^{2m} F_i F_{i-1} + F_{2m+1}F_{2m} + F_{2m+2}F_{3m+1}$$

por hipótesis el primer termino es igual a F_{2m}^2, luego saco factor común F_{2m+1} y queda

$$F_{2m}^2 + F_{2m+1}(F_{2m} + F_{2m+2})$$

Usando que $F_{2m+2} = F_{2m+1} + F_{2m}$ Sustituyo y:

$$F_{2m}^2 + F_{2m+1}(F_{2m} + F_{2m+1} + F_{2m}) = F_{2m}^2 + F_{2m+1}(2F_{2m} + F_{2m+1})$$

Luego hago distributiva:

$$F_{2m}^2 + 2F_{2m+1}F_{2m} + F_{2m+1} = (F_{2m} + F_{2m+1})^2 = F_{2m+2}^2$$

Completando así la demostración. □

3)

Base inductiva Para $n = 1$ tenemos

$$1 = \vec{F_1} = F_1 F_2 = 1$$

Por lo tanto se cumple.
Hipótesis inductiva

$$\exists m : \sum_{i=1}^{m} F_i^2 = F_m F_{m+1}$$

Tesis Inductiva Si la hipótesis es cierta tengo que:

$$\sum_{i=1}^{m+1} F_i^2 = F_{m+1} F_{m+2}$$

Descomponemos la sumatoria desde $i = 1$ hasta $i = m$ y nos queda un termino sobrante, luego saco factor común F_{m+1}

$$\sum_{i=1}^{m} F_{m+1}^2 = F_m F_{m+1} + F_{m+1}^2 = F_{m+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{m+1}F_{n+2}$$

Lo que implica la igualdad de ambos lados. Completando así la demostración. $\square$

Ejercicio 1.16. *Se considera la función f definida sobre $\mathbb{R} - \{-2/3\}$ por:*

$$f(x) = \frac{1}{3x + 2}$$

Demuestre que la derivada n-ésima de f es:

$$f^{(n)}(x) = \frac{3(-1)^n n!}{(3x + 2)^{n+1}}$$

Base Inductiva Usando la regla de la cadena derivamos una vez y obtenemos:

$$f'(x) = 3(-1) \times 1(3x + 2)^{-2}$$

Cumpliendo la base.

Hipótesis inductiva

$$\exists m : f^{(m)}(x) = 3(-1)^m m!(3x + 2)^{-(m+1)}$$

Tesis inductiva

En condiciones de la hipótesis se cumple que:

$$f^{(m+1)}(x) = 3(-1)^{m+1}(m + 1)m!(3x + 2)^{-(m+2)}$$

Derivando usando la regla de la cadena obtenemos simplemente lo buscado. Este ejercicio no reviste dificultad alguna.$\square$