Matemática Discreta I

Solución de Examen

Miércoles 5 de febrero de 2014

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 36 puntos).
Correctas: 12 puntos, Incorrectas: -3 puntos, Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $a = \#\{f : A \to P(A)$ tal que $x \in f(x),\ \forall x \in A\}$ y $b = \#\{f : A \to P(A)$ tal que $x \notin f(x),\ \forall x \in A\}$.

Opciones:

A) $a = b, \quad a + b = 2^{5\times5}$.
B) $a < b, \quad a + b = 2 \times 2^{4\times4}$.
C) $a = b, \quad a + b = 2 \times 2^{4\times5}$.
D) $a > b, \quad a + b = 2 \times 2^{4\times4}$.
E) $a < b, \quad a + b = 2 \times 2^{5\times4}$.

(Recordamos que $P(A)$ es el conjunto de subconjuntos de A).

EJERCICIO 2 Tenemos una escalera con n escalones y en cada paso se permite subir 1 o 2 escalones. Llamamos a_n al número de formas distintas de subir la escalera con ese tipo de pasos. Entonces:

Opciones:

A) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
B) existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
C) $a_{n+1} = 2a_n$.
D) $a_n = -4(-1)^n + \frac{3}{2}(-2)^n$.
E) $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

EJERCICIO 3 ¿Cuántos sumandos (monomios) distintos tiene el desarrollo de la expresión $(x + y + z + 1)^{12}$?

Opciones: A) C^{12}_4; B) C^{15}_4; C) 3^{12}; D) 4^{12}; E) C^{15}_3.

Solución Ejercicio 1:

Para calcular a observamos que la imagen de un elemento $x \in A$ a través de f solo tiene que cumplir la condición $x \in f(x)$. O sea, la imagen de 1 tiene que ser un subconjunto de A que contenga a 1, la imagen de 2 tiene que ser un subconjunto de A que contenga a 2, etc. Tenemos 2^4 casos posibles para la imagen de 1, pues cada uno de los otros elementos puede pertenecer o no a $f(1)$. Mismo razonamiento para la imagen de 2, etc. En total tenemos que, usando la regla del producto, $2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4$ posibilidades. Esto es $a = (2^4)^5$.

Para calcular b el razonamiento es similar. La condición es $x \notin f(x)$ para cada $x \in A$. Entonces $f(1)$ no puede tener a 1, $f(2)$ no puede tener a 2, etc. Tenemos 2^4 casos posibles para la imagen de 1, pues cada uno de los otros elementos puede pertenecer o no a $f(1)$. Mismo razonamiento para la imagen de 2, etc. En total tenemos que, usando la regla del producto, $2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4$ posibilidades. Esto es $b = (2^4)^5$. Luego, la opción correcta es la C).

Solución Ejercicio 2:

Primero observemos que $a_1 = 1$ y que $a_2 = 2$. Luego, para subir n escalones, tenemos dos posibilidades. Haber subido $n - 1$ escalones y luego subir uno más, o bien haber subido $n-2$ escalones y luego de un paso subir dos. O sea, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Esta recurrencia es Fibonacci, cuya solución es de la forma que presenta la opción B). Vale aclarar que la opción E) es incorrecta pues, por Fibonacci, $a_2 = a_1 + a_0$. Luego $a_0 = 1$.

Solución Ejercicio 3:

La expresión desarrollada de $(x+y+z+1)^{12}$ tiene sumandos de la forma: $\mu x^{\alpha_x} y^{\alpha_y} z^{\alpha_z}$ con $\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \leq 12$, siendo $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z \geq 0$. Encontrar cuántos sumandos hay equivale a resolver el problema anterior, y esto es $CR^4_{12} = C^{15}_{12} = C^{15}_3$ (donde la última igualdad vale por *"Combinaciones complementarias"*).

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 64 puntos).

EJERCICIO 4 *(24 puntos)*

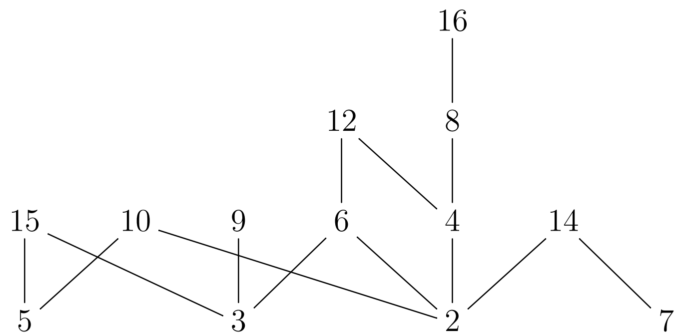
Sea $\mathfrak{B} = \{\ x \in \mathbb{N}\ /\ 2 \leq x \leq 16\ \text{ y } x \neq 11,\ 13\}$. Se define la relación $\mathcal{R} \subset \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ tal que $x\ \mathcal{R}\ y$ si x divide a y.

1. Probar que es una relación de orden. Dibujar el diagrama de Hasse.
2. Hallar los elementos maximales y minimales de $(\mathfrak{B}, \mathcal{R})$.
3. ¿Es $(\mathfrak{B}, \mathcal{R})$ retículo?
4. Exhibir una anticadena con cardinal máximo.

Solución Ejercicio 4:

1. La relación $(\mathfrak{B}, \mathcal{R})$ es de orden. Claramente es reflexiva, pues todo natural se divide a sí mismo, y además es antisimétrica, pus si x divide a y, en particular $x \leq y$. Luego si y divide a x entonces tendríamos $y \leq x$. O sea, sería $x = y$. Por último, observemos que si x divide a y existe un enetero n tal que $y = nx$. Análogamente si y divide a z existe un entero m tal que $z = my$. Luego $z = mnx$, con mn entero, y por lo tanto x divide a z. Esto prueba la transitiva.

Diagrama de Hasse.



2. Los elementos maximales son $\{9, 10, 12, 14, 15, 16\}$. Los elementos minimales son: $\{2, 3, 5, 7\}$.

3. No es retículo. Por ejemplo, el conjunto con los elementos 4 y 5 no tienen supremo en $\mathfrak{B}$.

4. Una anticadena con cardinal máximo es la determinada por los elementos maximales. Otra posible es, por ejemplo: $\{7, 9, 12, 8, 10, 15\}$.

EJERCICIO 5 *(20 puntos)*
Sea $G = (V, E)$ un grafo k-regular.

1. Demostrar que G o $\tilde{G}$ (grafo complemento) es conexo.

2. Definir camino hamiltoniano.

3. Demostrar que G o $\tilde{G}$ (grafo complemento) es hamiltoniano.

Solución Ejercicio 5:

1. Supongamos que $n = \sharp V$. Luego consideremos el caso en que $\frac{n}{2} \leq k$. Sean x, y vértices de G. Queremos probar que x e y están conectados. Si x es adyacente a y no hay nada que demostrar. Si x e y no son adyacentes, considero A_x el conjunto de vértices de G adyacentes a x y A_y el conjunto de vértices de G adyacentes a y. Por hipótesis $\sharp A_x = \sharp A_y = k \geq \frac{n}{2} \geq \frac{n-1}{2}$. Luego, como ni x ni y pueden estar en $A_x \cup A_y$, por el *Principio del palomar* (o simplemente contando elementos) se concluye que $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ (obsérvese por favor que para esta conclusión es suficiente la utilizar la desigualdad más débil: $\sharp A_x = \sharp A_y = k \geq \frac{n-1}{2}$). O sea existe $z \in A_x \cap A_y$. Luego x e y están conectados.

   Obsérvese antes de trabajar en el segundo caso, que si G es k-regular, entonces $\tilde{G}$ es $(n-k-1)$-regular. Luego, en caso que $\frac{n}{2} > k$, entonces $\frac{n-1}{2} \geq k$. Por lo tanto $n - \frac{n-1}{2} \leq n - k$ con lo cual $\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \leq n - k$ y esto implica finalmente que $\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \leq n - k - 1$. O sea se tiene que $\frac{n-1}{2} \leq n - k - 1$ y por lo tanto repitiendo el argumento dado antes se puede probar, en este caso, que $\tilde{G}$ es conexo.

2. Definición 11.21, Grimaldi, página 578 (dependiendo la versión).

3. Comencemos discutiendo el caso en que $\frac{n}{2} \leq k$ con $n = \sharp V$. Asumamos $n \geq 3$ (o $n \geq 2$ si solo se quiere probar la existencia de camino hamiltoniano). Luego, por Corolario 11.5 (o bien Corolario 11.4) del Grimaldi, tenemos que existe ciclo (camino) hamiltoniano. O sea G es hamiltoniano.

   En el caso que $\frac{n}{2} > k$ se tiene, como vimos arriba, que $\frac{n-1}{2} \leq n - k - 1$ y por lo tanto repitiendo el argumento dado antes se puede probar, en este caso, que $\tilde{G}$ es hamiltoniano (al menos se garantiza usando el Corolario 11.4 que existe un camino hamiltoniano).

EJERCICIO 6 *(20 puntos)*

1. Demostrar que D_n es el número entero más próximo a $\frac{n!}{e}$.

2. ¿Cuántos desarreglos hay de la palabra DESARREGLO?
   (O sea: ¿cuántas palabras distintas (con o sin sentido) se pueden formar con las letras de la palabra DESARREGLO, sin que aparezca ninguna letra en la misma posición que en la palabra original?)

Solución Ejercicio 6:

1. Aceptemos la fórmula demostrada en clase con el Principio de inclusión - exclusión:

   $$D_n = n! - C_1^n \times (n-1)! + C_2^n \times (n-2)! - \cdots + (-1)^n = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

   Como $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$, entonces $\frac{n!}{e} = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)!} + \cdots$, por lo tanto $|\frac{n!}{e} - D_n| = |(-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)!} + \cdots| \leq |\frac{1}{n+1}| \leq \frac{1}{2}$, para todo $n \geq 2$. Se concluye lo pedido.

2. Si todas las letras fuesen diferentes tendríamos D_{10} desarreglos de la palabra DESARREGLO, pues tiene 10 letras. Como repite la E y la R, entonces, debemos restar casos.

   - Si la primer E se instala en el lugar de la segunda, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_9 casos a restar.
   - Si la segunda E se instala en el lugar de la primera, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_9 casos a restar.
   - Si la primer R se instala en el lugar de la segunda, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_9 casos a restar.
   - Si la segunda R se instala en el lugar de la primera, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_9 casos a restar.

- Si las E cambian de lugar entre sí, y el resto permuta sin repetir su propio lugar tenemos D_8 casos a restar.
- Si las R cambian de lugar entre sí, y el resto permuta sin repetir su propio lugar tenemos D_8 casos a restar.

Pero hemos eliminado casos de más. Siguiendo con la lógica del Principio de Inclusión-Extensión, tenemos:

- Si la primer E se instala en el lugar de la segunda y la primer R se instala en el lugar de la segunda, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_8 casos a sumar.
- Si la primer E se instala en el lugar de la segunda y la segunda R se instala en el lugar de la primera, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_8 casos a sumar.
- Si la segunda E se instala en el lugar de la primera y la primer R se instala en el lugar de la segunda, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_8 casos a sumar.
- Si la segunda E se instala en el lugar de la primera y la segunda R se instala en el lugar de la primera, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_8 casos a sumar.
- Si las E se cambian de lugar entre sí y la primer R se instala en el lugar de la segunda, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_7 casos a sumar.
- Si las E se cambian de lugar entre sí y la segunda R se instala en el lugar de la primera, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_7 casos a sumar.
- Si las R se cambian de lugar entre sí y la primer E se instala en el lugar de la segunda, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_7 casos a sumar.
- Si las R se cambian de lugar entre sí y la segunda E se instala en el lugar de la primera, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_7 casos a sumar.
- Cuando las E cambian de lugar entre sí y las R también, y el resto se comporta en forma de desarreglo, son D_6 casos a sumar.

En total tenemos $D_{10} - 4 \times D_9 + 2 \times D_8 + 4 \times D_7 + D_6$ casos. Finalmente los casos arriba computados están repetidos porque las E no se distinguen y las R tampoco. Es decir, la solución *EDRRGLOESA* no nos dice si es la primer o segunda E de DESARREGLO la que aparece primera en *EDRRGLOESA*. La misma situación se repite con la R.

Por lo tanto la solución final es:

$$\frac{D_{10} - 4 \times D_9 + 2 \times D_8 + 4 \times D_7 + D_6}{2! \times 2!}.$$