Matemática Discreta I

Solución del examen

Lunes 23 de diciembre de 2013

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 42 puntos).
Correctas: 14 puntos, Incorrectas: -3 puntos, Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 En una clase de primer año de escuela rural hay 6 niños y 6 libros distintos.

La maestra quiere darle, la primer semana de clase, a cada niño un libro, que el niño lo lea y lo devuelva, y a la siguiente semana repartir nuevamente los libros de forma tal que cada niño se lleve a su casa un libro distinto del que se llevó la primer semana. ¿De cuántas formas puede la maestra hacer esta repartición (las 2 semanas)?

Opciones:

A) e^{-1}.
B) $C^6_2 \times 6!$.
C) $265 \times 6!$.
D) $6! \times 5!$.
E) 265.

EJERCICIO 2 El número de recorridos simples que no son ciclos, de largo 3, en $K_{10} - e$, siendo e una arista de K_{10} es:

Opciones:

A) $10 \times 9 \times 8$.
B) $7 \times 8 \times 43$.
C) $10 \times 9 \times 4$.
D) $42 \times 8 \times 7$.
E) $44 \times 43 \times 42$.

EJERCICIO 3 Calcular la cantidad de relaciones de orden $\mathcal{R}$ definibles en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ que verifican que la anticadena más grande tiene 3 elementos y tienen máximo pero no mínimo.

Opciones:

A) Hay cuatro diagramas de Hasse posibles y $5! \times 4$ relaciones posibles.
B) Hay cinco diagramas de Hasse y 5! relaciones posibles.
C) Hay cuatro diagramas de Hasse posibles y 200 relaciones posibles.
D) Hay cuatro diagramas de Hasse posibles y 240 relaciones posibles.
E) Hay cinco diagramas de Hasse posibles y 180 relaciones posibles.

Solución Ejercicio 1:

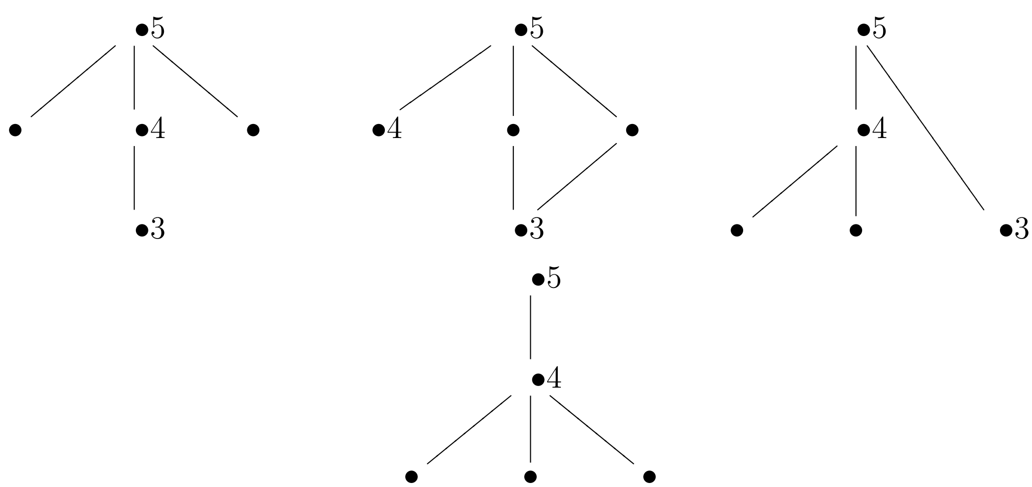
Para el primer reparto de libros hay 6! posibilidades. En la segunda semana se distribuyen nuevamente los libros, con el criterio lógico de no repetir libros para cada alumno. Esto es D_6 (o d_6, mayúscula o minúscula para marcar desarreglos de 6 elementos). Sabemos que D_6 es muy próximo a $6!/e$, o sea $D_6 \approx \frac{720}{2{,}78} = \frac{720\times100}{278} = \frac{360\times100}{139}$, y esto es aproximadamente igual (levemente mayor) que $\frac{360\times100}{140} = \frac{90\times20}{7} \approx 257$. Luego, aplicando la regla del producto, la única solución correcta posible es: (C) $265 \times 6!$.

Solución Ejercicio 2:

Una forma eficaz de contar para resolver este ejercicio, sería contar el número de recorridos simples de largo 3 que no son ciclos en K_{10} y luego eliminar aquellos recorridos de largo 3 que no son ciclos que contienen la arista e. Empecemos observando que K_{10} tiene 45 aristas. Luego, tenemos 45 posibilidades para elegir la primer arista del recorrido buscado. Podemos pensar que la arista ya seleccionada (llamésmola e_2) es la "del medio" en el recorrido de largo 3 buscado. Observemos ahora que cada vértice de K_{10} tiene grado 9. Luego, tenemos para elegir 8 aristas más en uno de los vértices de e_2. Para el otro vértice obsérvese que solo se tiene 7 aristas para elegir, porque la octava forma ciclo con las otras dos elegidas. Entonces tenemos $45 \times 8 \times 7$ posibles formas de elegir recorridos de largo 3 que no son ciclos en K_{10}. (Inténtese ahora otras formas de conteo de esta elección, como por ejemplo asumir que la primer arista elegida no es central en el recorrido buscado. Aparecerá, nuevamente, $45 \times 8 \times 7$).

Ahora debemos contar cúantos de los recorridos anteriores contienen la arista e. Si la arista e estuviese al centro de un tal recorrido, tendríamos, razonando igual que arriba, 8×7 posibles recorridos en esas condiciones. Para terminar el razonamiento, pongámosle nombre a los vértices de e: v_1 y v_2. Podemos pensar ahora en los casos que la arista e no está al centro del recorrido. Tenemos dos posibilidades: que el vértice que quede "libre" sea v_1 o sea v_2. Si v_1 es el vértice que queda "libre", entonces para v_2 tenemos 8 aristas posibles, y luego para terminar el recorrido tenemos 7 posibles aristas, pues la octava forma ciclo. El mismo argumento se habrá de usar para contar el caso en que v_2 quede libre. En total son $8 \times 7 \times 3$ casos a restar de los analizados en primera instancia. Finalmente se concluye que hay $42 \times 8 \times 7$ recorridos simples de largo 3 que no son ciclos en $K_{10} - e$.

Solución Ejercicio 3: Como la anticadena más grande tiene tres elementos, contando a partir de la misma surgen los cuatro diagramas de Hasse posibles:



Los números que aparecen en los diferentes diagramas son la cantidad de opciones para elegir (con regla del prodcuto en cada diagarma). O sea, tenemos $5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 = 200$ casos.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 58 puntos).

EJERCICIO 4 *(14 puntos)*

(a) Hallar el menor natural n para el cual la desigualdad $\sum_{i=1}^{i=n} \log_2^i > n$.

(b) Probar la desigualdad, usando Inducción Completa, a partir de dicho valor.

Solución Ejercicio 4:

(a) El menor natural es $n = 4$. Para $n = 3$ la sumatoria de la izquierda resulta $\log_2^1 + \log_2^2 + \log_2^3 = 0 + 1 + \log_2^3$. Pero $\log_2^3 < 2$ pues $2^2 = 4$. Entonces la sumatoria queda menor que 3. Para $n = 4$ tenemos $\log_2^1 + \log_2^2 + \log_2^3 + \log_2^4 = 0 + 1 + \log_2^3 + 2 = 3 + \log_2^3$. Ahora, $\log_2^3 > 1$ pues $2^1 = 2$, entonces la sumatoria es mayor que 4.

(b) Por la parte anterior tenemos la base inductiva ($n = 4$). Asúmase que (HI) la desigualdad es cierta para $n = h$, con $h \geq 4$ (o sea, sabemos que: $\sum_{i=1}^{i=h} \log_2^i > h$, para $h \geq 4$), y probemos para $n = h + 1$ (TI). O sea queremos probar que:

$$\sum_{i=1}^{i=h+1} \log_2^i > h + 1.$$

Pero $\sum_{i=1}^{i=h+1} \log_2^i = \sum_{i=1}^{i=h} \log_2^i + \log_2^{h+1} > h + \log_2^{h+1}$ donde la última desigualdad surge usando la HI. Finalmente $\log_2^{h+1} > 2$, pues $h \geq 4$ y la función logaritmo en base 2 es creciente. Luego tenemos que $\sum_{i=1}^{i=h+1} \log_2^i > h + \log_2^{h+1} > h + 2 > h + 1$, lo que queríamos probar.

EJERCICIO 5 *(22 puntos)*

Demostrar la siguiente fórmula:

$$D_{n+1} = n \times (D_n + D_{n-1}) \text{ para todo } n \geq 2.$$

(La fórmula anterior se llama *Stiefel* para *Desarreglos*).

Solución Ejercicio 5:

Habría varias formas de resolver este ejercicio. Una de ellas es la siguiente.

Sean $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ los elementos a permutar en forma de "desarreglo" (es decir que ninguno quede en su lugar). El último elemento, es decir x_{n+1} puede ubicarse en cualquiera de lo primeros n lugares. Elijamos uno cualquiera, por ejemplo, el lugar j-ésimo (con $1 \leq j \leq n$). Luego cabe preguntare dónde se destina el elemento x_j.

Primer caso que se plantea es que x_j termine en el lugar $n+1$, es decir, en este caso, se intercambian de lugar x_j y x_{n+1}. Los $n-1$ elementos restantes habrán de permutarse entre sí en forma de desarreglo (es decir D_{n-1} casos).

Segundo caso es que x_j se destine a otro lugar $1 \leq i \leq n$ con $i \neq j$. Esta stiuación coincide con modelar así: el elemento x_j lo pensamos estaba en el lugar $n+1$, el lugar $j-$ésimo está anulado y la permutación de los elementos se da en forma de desarreglos entre n-lugares y n-elementos (o sea esta sería la posición original: $\boxed{x_1}$, $\boxed{x_2}$, ..., $\boxed{x_{j-1}}$, $\boxed{x_{j+1}}$,..., $\boxed{x_n}$,$\boxed{x_j}$). Esto nos generan D_n casos más.

Resumiendo tenemos que $D_{n+1} = n \times (D_n + D_{n-1})$.

También se puede resolver usando IC, o bien usando la fórmula (no la aproximación) para desarreglos D_n.

EJERCICIO 6 *(22 puntos)*

(a) Suponemos que una bici ocupa una lugar de estacionamiento para bicis y una moto ocupa dos. Si a_n es el número de formas posibles de estacionar bicis y motos en un estacionamiento de n lugares numerados, describir la relación de recurrencia para a_n (se asume que todos los lugares quedan ocupados).

(b) Calcular a_{30}.

Solución Ejercicio 6:

(a) Es fácil calcular que $a_1 = 1$ (una bici) y que $a_2 = 2$ (dos bicis o una moto). Para calcular a_{n+1} tenemos que en el último (o últimos lugares) puede estar una bici o una moto (ocupando dos lugares). Si es una bici en los n lugares anteriores tenemos a_n posibilidades y si es una moto tenemos a_{n-1} posibilidades en los $n-1$ lugares anteriores. Luego $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ casos (recurrencia de Fibonacci). En particular surge de la ecuación y de las condiciones iniciales que $a_0 = 1$.

(b) El polinimio característico es $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ cuyas raíces son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (razón áurea) y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La solución general tiene la forma:

$$a_n = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Finalmente, utilizando las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$ (o si se quiere $a_2 = 2$), se concluye que $\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ y $\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Por lo tanto la solución general tiene la forma:

$$a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

En particular $a_{30} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{30} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{30}$ (vale observar que a_{30} =1.346.269, aunque no se solicitaba calcular explícitamente el valor).