Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 8.

Ejercicio 1. Sea X un conjunto cualquiera, y $(V, \mathbb{K}, +, .)$ un espacio vectorial. Consideramos el conjunto $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones de X que toman valores en V. Es decir,

$$\mathcal{F} = \{f : \; f : X \to V\}.$$

Definimos

- SUMA DE DOS FUNCIONES: $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X$;
- PRODUCTO DE UNA FUNCIÓN f POR UN ESCALAR λ: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in X$.

Mostrar que $(\mathcal{F}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 2. Investigar si $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial en caso de que las operaciones de suma y producto se definan de las siguiente maneras, para todo x_1, x_2, y_1, y_2 y λ reales:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (3\lambda y_1, x_1)$;
2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, 0)$;
3. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$;
4. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, x_2 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$;
5. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|), \quad (x_1, y_1) = (|\lambda x_1|, |\lambda y_1|)$.

Ejercicio 3. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones reales de variable real. Investigar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{F}$ son subespacios vectoriales:

1. para un $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, el conjunto de las funciones f tales que $f(x_0) = 0$;
2. el conjunto de funciones f para las que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Ejercicio 4. Consideremos el espacio vectorial V formado por todas las sucesiones reales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Investigar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{F}$ son subespacios vectoriales:

1. para un $n_0 \in \mathbb{N}$ dado, el conjunto de las sucesiones tales que $a_n = 0$ si $n \geq n_0$;
2. el conjunto de las sucesiones para las que existe un número natural n_0 tal que $a_n = 0$ si $n \geq n_0$;
3. el conjunto de las sucesiones para las que existe $lim_{n \to \infty} a_n$;
4. el conjunto de las sucesiones acotadas;
5. para un número $l \in \mathbb{R}$ dado, el conjunto de las sucesiones tales que

$$l = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Discutir según l.

Para los conjuntos que sean subespacios, estudiar cuáles son las relaciones de inclusión entre ellos.

Ejercicio 5. Se considera el $\mathbb{K}$ espacio vectorial formado por las matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. En cada caso, investigar si los subconjuntos de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ son subespacios vectoriales:

1. el conjunto de las matrices simétricas. Es decir, de aquellas matrices que satisfacen $A = A^t$;
2. el conjunto de las matrices antisimétricas; que satisfacen $A = -A^t$;
3. el conjunto de las matrices invertibles;
4. fijado $X \in \mathbb{K}^n$, el conjunto de matrices A tales que $AX = 0$.

Ejercicio 6. Intersección de una colección de subespacios

1. Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una colección de subespacios de un subespacio vectorial V. Mostrar que la intersección $S = \cap_{i \in I} S_i$ de todos los subespacios es un subespacio vectorial.
2. Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales. Mostrar que el conjunto de las funciones f reales y continuas tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ es un espacio vectorial real. En general, si $X \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$, mostrar que las funciones reales y continuas que se anulan en todos los puntos de X forman un espacio vectorial real.

Ejercicio 7. En cada caso, determinar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial dado.

1. Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ considerar:
   (a) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 \geq 0\}$;
   (b) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$;
   (c) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1\}$;
   (d) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$;
   (e) $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V;\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$.
2. Para el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales, considerar:
   (a) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(1-x) = p(1+x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   (b) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
   (c) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = p'(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo.
3. Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ formado por las funciones reales de variable real considerar:
   (a) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es continua}\}$;
   (b) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es derivable}\}$;
   (c) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(1) = f(0)\}$;
   (d) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(x^2) = f(x)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   (e) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es par}\}$;
   (f) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es impar}\}$;
4. Para el espacio vectorial formado por todas las sucesiones reales, al que indicaremos[1] con la notación $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, considerar
   (a) $S = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V;\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es convergente}\}$;
   (b) $S = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V;\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es divergente}\}$;
   (c) $S = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V;\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$.

[1]En general, Y^X es el conjunto de todas las funciones definidas sobre X y que toman valores en Y.