ELECTROMAGNETISMO
CURSO 2010*

4.6

a

Trabajamos en coordenadas cilíndricas, con z apuntando en la dirección vertical. Despreciando efectos de borde, los campos son radiales y el potencial electrostático verifica:

$$V(r) = a\ln r + b.$$

Imponiendo las CB: $V(r=R) = V_0$ y $V(r = R+d) = 0$, despejamos a y b, quedando

$$V(r) = -\frac{V_0}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}\ln r + \frac{V_0\ln(R+d)}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}, \quad R \le r \le R+d, \ \ 0 \le z \le L \tag{1}$$

El campo eléctrico es: $\vec{E} = -\nabla V$, luego

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}\frac{\hat{e}_r}{r}, \quad R \le r \le R+d, \ \ 0 \le z \le L \tag{2}$$

NOTA: En la región de interés, $R \le r \le R+d, \quad 0 \le z \le L$, vale la ecuación de Laplace por el siguiente razonamiento. Por un lado, es claro que en $R \le r \le R+d, \ \ h \le z \le L$ se verifica la ecuación de Laplace porque tenemos $\nabla.\vec{E} = 0$, $\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$. Para la zona $R \le r \le R+d, \quad 0 \le z \le h$, sucede que $\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$ y $\nabla.\vec{D} = 0$. Pero $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, entonces

$$\nabla.\vec{D} = \nabla\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \nabla\varepsilon\cdot\vec{E} + \varepsilon\nabla\cdot\vec{E} = 0$$

Al ser el gradiente de la permitividad perpendicular al campo eléctrico (el cual es radial, porque desprecio efectos de borde), resulta de la ecuación anterior que $\nabla.\vec{E} = 0$, lo que termina por demostrar que se verifica la ecuación de Laplace en toda la región de interés.

b

El campo eléctrico para $r < R$ es nulo. Para $0 \le z \le h$,

$$\sigma_l = D_{|r=R} = \varepsilon(z)E_{|r=R} = \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\left(1-\frac{z}{h}\right) + \varepsilon_0\right]\frac{V_0}{R\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)} \tag{3}$$

Para $h < r \le L$,

$$\sigma_l = \varepsilon_0 E_{|r=R} = \frac{V_0\varepsilon_0}{R\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)} \tag{4}$$

*Por correcciones o sugerencias: mforets at fing.edu.uy

c

Calculemos la carga total sobre el cilindro interior:

$$\begin{aligned}
Q_{\text{tot.}} &= Q_{0\leq z\leq h} + Q_{h<z\leq L} \\
&= \frac{V_0}{R\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}\int_0^h\int_0^{2\pi}\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{h}z\right)Rd\varphi dz \\
&+ \frac{V_0\varepsilon_0}{R\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}2\pi(L-h)R \\
&= \frac{V_0}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}\left(2\pi L\varepsilon_0+\pi h(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\right)
\end{aligned}$$

La capacidad del sistema será: $C = Q/V$,

$$C = \frac{2\pi L\varepsilon_0 + \pi h(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}. \tag{5}$$

Hay una manera alternativa para hallar C que es considerando la contribución a la capacidad del sistema de cada elemento de altura dz, que se puede hacer de la siguiente manera. En primer lugar, recordamos que la capacidad de un condensador cilíndrico por unidad de longitud es:

$$\frac{C_{\text{cil.}}}{L} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(R_2/R_1)},$$

donde el material entre las placas tiene una permitividad ε. Entonces

$$C = C_{0\leq z\leq h} + C_{h<z\leq L},$$

porque los condensadores están en paralelo. El término en el vacío se calcula como:

$$C_{h<z\leq L} = \frac{2\pi\varepsilon_0(L-h)}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)},$$

mientras que el otro término se puede pensar como la serie de muchos condensadores de altura dz, y luego sumando estas capacidades porque están todos en paralelo, es decir

$$\begin{aligned}
C_{0\leq z\leq h} &= \int dC(z) = \frac{2\pi}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}\int_0^h \varepsilon(z)dz \\
&= \frac{\pi h(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}.
\end{aligned}$$

Obtenemos

$$C = C_{0\leq z\leq h} + C_{h<z\leq L} = \frac{2\pi L\varepsilon_0 + \pi h(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\ln\left(1+\frac{d}{R}\right)}, \tag{6}$$

que es el resultado obtenido antes.

d

Invocando al resultado que para un condensador la energía electrostática almacenada es $U = \frac{CV_0^2}{2}$, queda

$$U = \left(\frac{2\pi L\varepsilon_0 + \pi h(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\ln\left(1 + \frac{d}{R}\right)} \right) V_0^2,$$

a partir del cual se puede hallar la fuerza en la dirección z que se ejerce sobre el fluido dieléctrico, considerando el cambio virtual en la energía cuando hay una pequeña variación en h,

$$F_z = +\frac{dU}{dh}_{|V=cte.} = \frac{\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)V_0^2}{2\ln\left(1 + \frac{d}{R}\right)}.$$

Para obtener la altura de equilibrio esta fuerza se debe igual al peso de la columna,

$$F_g = m\ g = \rho V g \approx 2\pi R h d,$$

donde hicimos la hipótesis que $d << R$. Con esta hipótesis queda también que $\ln(1 + d/R) \approx d/R$. Igualando las fuerzas y despejando h, queda

$$h_{\text{eq.}} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)V_0^2}{4d^2\rho g}. \tag{7}$$

Alternativamente, se puede calcular la energía electrostática sumando la contribución de las regiones con y sin dieléctrico, de la siguiente manera:

$$U_{h<z\leq L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{h<z\leq L} E^2 d^3r = \left(\frac{2\pi(L-h)\varepsilon_0}{2\ln\left(1 + \frac{d}{R}\right)} \right) V_0^2,$$

$$U_{0\leq z\leq h} = \frac{1}{2}\int_{0\leq z\leq h} \varepsilon(z) E^2 d^3r = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)h}{2}\frac{V_0^2 2\pi}{\ln\left(1 + \frac{d}{R}\right)}.$$

Entonces

$$U = U_{h<z\leq L} + U_{0\leq z\leq h} = \frac{V_0^2}{2\ln\left(1 + \frac{d}{R}\right)}\left(2\pi L\varepsilon_0 - \pi h\varepsilon_0 + \pi h\varepsilon_1\right), \tag{8}$$

que es la misma expresión que se obtuvo antes para la energía, por lo que el resultado es consistente con lo anterior.