$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$C^n_0 \qquad C^n_1$

Ejercicio 1

Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de 1, 1, 1, ... la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

(a) $C^6_0, C^6_1, C^6_2, \ldots, C^6_6, \ldots$
(b) $C^6_1, 2C^6_2, \ldots, 6C^6_6, \ldots$
(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
(e) $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
(f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$
(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$
(j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

$$C^6_0 + C^6_1 x + C^6_2 x^2 + \cdots + C^6_6 x^6 \qquad (C^6_n = 0 \quad n > 6)$$

$$\| $$

$$\boxed{(1+x)^6}$$

(a) $C^6_0, C^6_1, C^6_2, \ldots, C^6_6, \ldots \longrightarrow C^6_0 + C^6_1 \cdot x + C^6_2 x^2 + \cdots$

(b) $C^6_1, 2C^6_2, \ldots, 6C^6_6, \ldots \longrightarrow C^6_1 + 2C^6_2 x + 3C^6_3 x^2 + \cdots$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1, 1, 1, 1, \ldots & \frac{1}{1-x} \\ 1, 2, 3, 4, \ldots & \frac{1}{(1-x)^2} \end{array}\right)$$

en general $A \cdot x^n \xrightarrow{\text{derivar}} A \cdot n \cdot x^{n-1}$

Vemos que (b) es la derivada de (a)

(a) era $(1+x)^6 \xrightarrow{\text{derivar}} 6 \cdot (1+x)^5$

$$C^6_0 + C^6_1 x + C^6_2 x^2 + C^6_3 x^3 + \cdots$$

$$0 + C^6_1 + 2 \cdot C^6_2 \cdot x + 3 \cdot C^6_3 x^2 + \cdots$$

$1, 1, 1, 1, \ldots$

(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

(c) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

$$= 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \ldots \qquad \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

$\boxed{y = -x}$

$$= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \ldots = \frac{1}{1-y}$$

(d) $0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + \underbrace{x^4 + x^5 + x^6 + \ldots}$

$$= x^4 \left(1 + x + x^2 + \ldots\right) = x^4 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^4}{1-x}$$

$3, 3, 3, \ldots \to \frac{3}{1-x}$

$3, -3, 3, -3, \ldots \to \frac{3}{1+x}$

(e) $\underbrace{0, 0, 0,}_{x^3}$ $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$ $\to \frac{3x^3}{1+x}$

(f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$

$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$

$$= 1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

Ejercicio 4.(5 pts.) Sean (a_n) y (b_n) las sucesiones asociadas a las funciones generatrices $A(x) = \frac{1+2x}{(1-x)^2}$ y $B(x) = \frac{1}{(1+2x)(1-x)}$. Sea (c_n) la convolución de ambas sucesiones. ¿Cuánto vale c_{10}?

Si $A(x) = \sum a_n x^n$, $B(x) = \sum b_n x^n$

$$\to \underbrace{A(x)\cdot B(x)}_{\text{distributiva}} = \sum c_n \cdot x^n.$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{10} x^{10} + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{10} x^{10} + \ldots)$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + \ldots + (a_0 b_{10} + a_1 b_9 + \ldots)\, x^{10} + \ldots$$

$$c_{10} = a_0 b_{10} + \cdots + a_{10} b_0 = \sum_{i=0}^{10} a_i b_{10-i}.$$

Ejercicio 4.(5 pts.) Sean (a_n) y (b_n) las sucesiones asociadas a las funciones generatrices $A(x) = \frac{1+2x}{(1-x)^2}$ y $B(x) = \frac{1}{(1+2x)(1-x)}$. Sea (c_n) la convolución de ambas sucesiones. ¿Cuánto vale c_{10}?

$a_0, \ldots, a_{10}$ $\quad$ $b_0, \ldots, b_{10}$ $\quad \xrightarrow{\text{usar fórmula}}$ $c_{10} = \ldots$

$$\boxed{C(x) = A(x) \cdot B(x)} = \frac{\cancel{1+2x}}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{(1+2x)}(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum CR^3_n \cdot x^n \quad \rightsquigarrow \quad c_{10} = CR^3_{10} = \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum CR^k_n \cdot x^n$$

$n \to$ varía.

k es fijo

$$(1+x)^k = \sum C^k_n \cdot x^n$$

$n \to$ varía.

Nota: si $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow C^k_n = 0 \;\forall n > k$.

$$\frac{1}{(1+x)^k} = \frac{1}{(1-y)^k} = \sum CR^k_n \, y^n = \sum CR^k_n (-x)^n$$

$x = -y \to y = -x$

$$= \sum (-1)^n \cdot CR^k_n \cdot x^n$$

Ejercicio 5
Verificar que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

Ejercicio 6
Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

$$\frac{1}{1-x^{100}} = 1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + \cdots$$ # formas con billetes de 100.

$$\frac{1}{1-x^{200}} = 1 + x^{200} + x^{400} + x^{600} + \cdots$$ billetes 200

$$n = n_{100} + n_{200}$$

→ # formas con billetes de 100 y 200

es $\frac{1}{1-x^{100}} \cdot \frac{1}{1-x^{200}}$

$$600 = 3 \times 200 = 2 \times 200 + 2 \times 100 = 1 \times 200 + 4 \times 100 = 0 \times 200 + 6 \times 100$$

$$(1 + x^{200} + x^{400} + x^{600} + \cdots)(1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + x^{400} + x^{500} + x^{600} + \cdots)$$

Ejercicio MO4: Cuatro maestras salen de paseo con seis niños y deciden formar tres grupos. ¿Cuántas formas hay de formar los grupos si cada uno debe contar con alguna maestra y algún alumno?

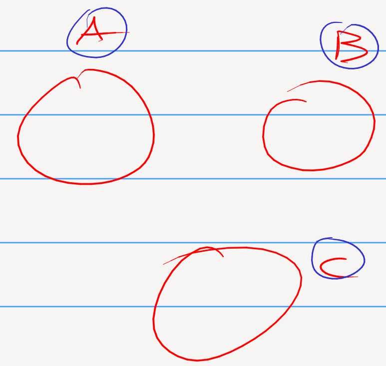
A) $S(4,3)S(6,3)$
B) $Sob(4,3)Sob(6,3)$
C) $S(4,3)Sob(6,3)$
D) Ninguna de las anteriores

n elementos m elementos

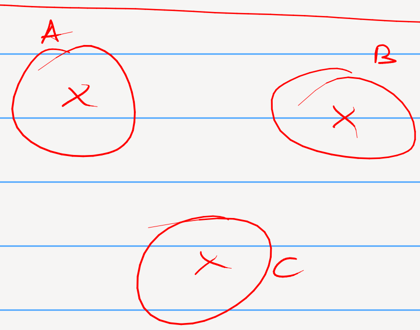
$f: A \to B$ Sobreyectivas

$Sob(n,m) = \#\{f: A \to B \text{ Sobreyectivas}\}$.

$A\{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow$



$(x\ x\ x\ x\ x\ x\ x)$



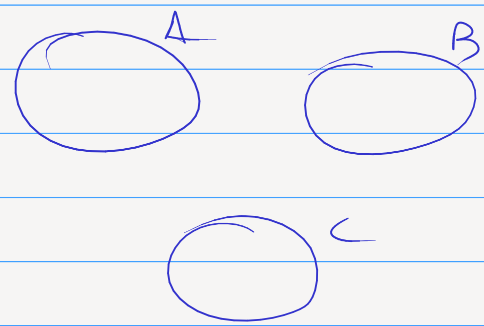
Reparto una naranja a cada uno
y quedan 4.

¿ CR_3^4, CR_4^3 ?

C_4^6

$x\ x|x|x \leftarrow \frac{6!}{4!\,2!}$

$\{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow$



Sin restricción usamos regla del producto.

$3 \times 3 \times \cdots \times 3 = 3^6$ formas

$\#\{f: \{1,2,3,4,5,6\} \to \{A,B,C\}\}$
sin restricción

CON restricción. $\#\{f : \{1,2,\overset{D}{3},4,5,6\} \to \{A,B,C\} \text{ sobreyectivas}\}$

$$= Sob(6,3)$$

$$\underbrace{\#\{f: D \to \{A,B,C\}\}}_{=3^6} - \underbrace{\#\{f: D \to \{A,B\}\}}_{=2^6} - \underbrace{\#\{f: D\to\{B,C\}\}}_{=2^6}$$
$$- \underbrace{\#\{f: D \to \{A,C\}\}}_{=2^6}$$
$$+ \underbrace{\#\{f: D \to \{A\}\}}_{=1} + \underbrace{\#\{f: D\to\{B\}\}}_{=1} + \underbrace{\#\{f: D\to\{C\}\}}_{=1}.$$

$$Sob(6,3) = 3^6 - 3\cdot 2^6 + 3\cdot 1 = \cdots$$

Ejercicio MO4: Cuatro maestras salen de paseo con seis niños y deciden formar tres grupos. ¿Cuántas formas hay de formar los grupos si cada uno debe contar con alguna maestra y algún alumno?

A) $S(4,3)S(6,3)$ $= \dfrac{Sob(4,3)}{3!}\cdot\dfrac{Sob(6,3)}{3!}$

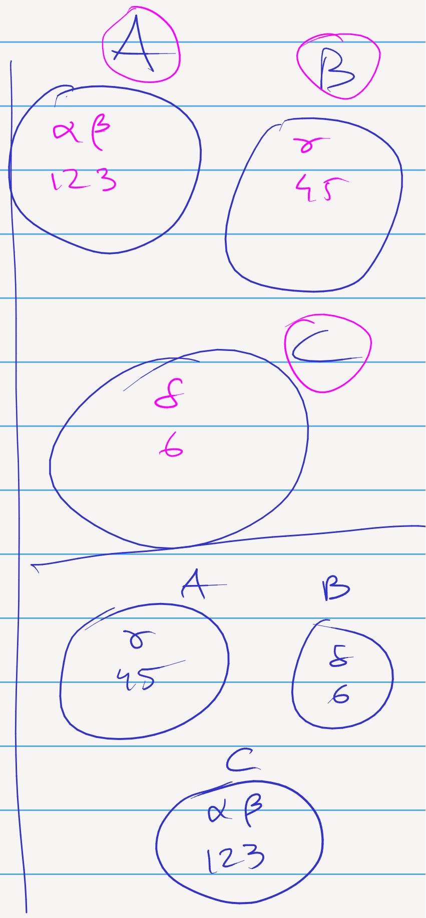
B) $Sob(4,3)Sob(6,3)$

C) $S(4,3)Sob(6,3)$ $= \dfrac{Sob(4,3)}{3!}\cdot Sob(6,3)$ ✓

D) Ninguna de las anteriores

maestras $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$

$\{1,2,3,4,5,6\}$ niños



Repartir maestras : $Sob(4,3)\cdot Sob(6,3)$

Repartir niños

ASÍ CONTAMOS CADA FORMA $6 = 3!$ veces.

Respuesta $\dfrac{Sob(4,3)\cdot Sob(6,3)}{3!}$

$$S(m,n) := \frac{Sob(m,n)}{n!}$$

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{colocar muestras y}\\ \text{niños en}\\ \text{las canastas}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{armar los}\\ \text{grupos}\end{array}\right\} \times \#\left\{\begin{array}{c}\text{poner los 3 grupos}\\ \text{en las 3}\\ \text{canastas}\end{array}\right\}$$

$Sob(4,3) \times Sob(6,3)$? $\; = P_3 = 3! = 6$

$f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$

todas las funciones: 6^3 (puede haber repetición)

inyectivas: $6 \times 5 \times 4 = P^6_3 = \frac{6!}{3!}$ (no repiten).

biyectivas $f: A \to B$ es biyectiva

$\Updownarrow$

$\left(\begin{array}{l}\#A = \#B\\ f \text{ es inyectiva}\end{array}\right)$

$$\#\text{ func biyectivas} = \begin{cases} 0 & \#A \neq \#B \\ n! & \#A = \#B = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

$A(x) = \sum a_n x^n$

$B(x) = \sum b_n x^n$

ec entre $A(x)$, $B(x)$

otra ec entre $A(x)$ y $B(x)$