Tipos de caminos:

(i) Triviales: caminos de longitud 0. (solo es un vertice el grafo). Es un camino cerrado particular.

(ii) abierto / cerrado.

(iii) Recorrido / circuitos: (no repite aristas).

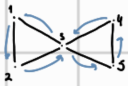
(iv) camino simple abierto / camino simple cerrado o ciclos: (no repite vertices). salvo el 1ero y el último en el cerrado.

longitud ≥ 3.

Obs: si es un ciclo $\Rightarrow$ es un circuito.

ejemplo:  $(1,2,3,4,5,3,1)$ es un circuito y no un ciclo ya que repite el 3.

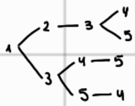
Preguntas:

1) ¿Cuántos caminos simples de longitud 3 tiene el grafo G? $G =$ 

2) ¿y cuántos ciclos de longitud 3? (Notación: 3-ciclos = ciclo de long. 3). $(1,2,3) \to$ en ambos sentidos. $(4,5,3) \to$ en ambos sentidos. } 4 ciclos.

Solución (1):

Caminos simples abiertos de longitud 3 que empiezan en 1.



} 4 posibilidades

Por simetría del grafo, comenzando por cualquier otro vertice $v \in \{2,4,5\}$ tambien hay 4 pos.

* no hay ninguno comenzando en 3.

Total $= 16$.

Solución (2):

Comenzando en 1: $(1,2,3,1)$, $(1,3,2,1)$ } 2 pos. (el orden es importante.) Idem comenzando en 2, 4 o 5.

comenzando en 3: 4 pos.

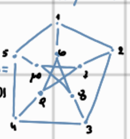
Total: $\underbrace{2+2+2+2}_{\text{comenzamos en } 1,2,4,5} + \underbrace{4}_{\text{comenzando en } 3} = 12$.

Def: Dado un grafo $G = (V, E, ext)$ se define una función distancia $d : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

$$d(v,w) = \begin{cases} \min\{\text{long}(\alpha) : \alpha \text{ es un camino entre } v \text{ y } w\} & \text{si existe algún camino de } v \text{ a } w. \\ \infty & \text{, si no existe un camino de } v \text{ a } w. \end{cases}$$

Diametro: el diametro de un grafo es $\text{diam}(G) = \max\{d(v,w) : v,w \in V\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

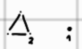
(convención: $\infty > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

ejemplo: $G =$  Consideremos el grafo de Peterson.

$d(6,3) = 2$, $d(6,10) = 2$

$d(6,9) = 2$, $d(6,6) = 0$

$\text{diam}(G) = 2$

Obs: $H =$  $d(2,1) = \infty$

$\text{diam}(H) = \infty$ ya que 1 no se puede conectar con el resto de los vertices.

Propiedades:

1) $d(v,v) = 0$, $\forall v \in V$.

2) $d(v,w) = d(w,v)$, $\forall v,w \in V$.

3) desigualdad triangular: $d(v,u) \leq d(v,w) + d(w,u)$, $\forall v,w,u \in V$.

(convencion: $n + \infty = \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\infty + \infty = \infty$)

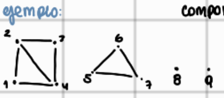
Componentes conexas de G:

Dado un grafo $G = (V, E, ext)$, definimos $v \sim w$ (rel. de equiv.) si $d(v,w) < \infty$ ($\exists$ camino α que va de v a w). (v y w son "conectables").

Ejercicio: Probar que es una relación de equivalencia.

Def: A cada clase de equivalencia le llamamos componente conexa de G.

ejemplo:



componente conexa: $[1] = \{ v \in V : 1 \sim v \} = \{1,2,3,4\}$ $\qquad [9] = \{ v \in N : 9 \sim v \} = \{9\}$

$[5] = \{ v \in V : 5 \sim v \} = \{5,6,7\}$

Notación: $K(G)$ cant. componentes conexas de G

$[8] = \{ v \in V ; 8 \sim w \} = \{8\}$

Def: (Subgrafo) sea $G = (V, E)$ y $G'(V', E')$ dos grafos simples. Decimos que G es un subgrafo de G (Notación $G' \leq G$) si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$

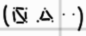
* en el ejemplo 2 el grafo $G' = (V', E')$

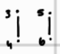
con $V' = \{5,6,7\}$, $E' = \{\{5,7\}\}$ $\subseteq$ subgrafo G.

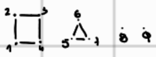
Algunos tipos de subgrafos: Sea $G' = (V', E') \leq G = (V, E)$.

- Recubridor: Decimos que G' es un subgrafo recubridor si $V' = V$.

- Subgrafo Inducido por I: Sea $I \subseteq V$, el subgrafo inducido por I si $w, v \in I$ / $\{v,w\}$ es una arista de $G[I]$ si y solo si $\{v,w\}$ es una arista en G.

ejemplo: Consideramos G del ejemplo 2. ()

1) $G[3,4,5,6] =$  (el subgrafo Inducido por $I = \{3,4,5,6\}$.

2) El subgrafo $G' =$  es recubridor pero no inducido.

3) El subgrafo G tiene 2^8 subgrafos recubridores.

Obs: Si G es un grafo y $I \subseteq V$ es una componente conexa de G. Al subgrafo $G[I]$ se le llama componente conexa de G (abuso de notación).

Def: Sea $G = (V, E)$ grafo simple, $v \in V$, $e \in E$ se define:

$$G - v = (\underbrace{V \setminus \{v\}}_{\{w \in V /\, w \neq v\}}, \{ e \in E : v \in e \})$$

$$G - e = (V, \underbrace{E \setminus \{e\}}_{\{e' \in E /\, e' \neq e\}})$$