

PR.3

Ejercicio 7

Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites, sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros ni gatos en el mismo escondite?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = P \cup G /$$

$$P = \{1, \dots, 6\}; G = \{7, 8\}$$

$$U := \{f : A \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ sobreyectiva}\}$$

$$C_{i,j} = \{f \in U : \exists i \in P, j \in G, f(i) = f(j)\}$$

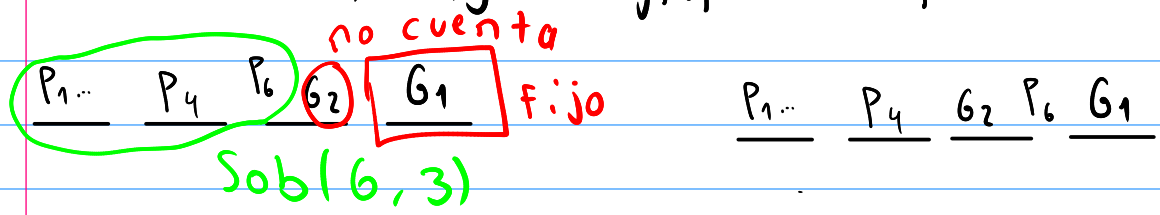
$$= C_{i,7} \cup C_{i,8}$$

Sob (8,4)

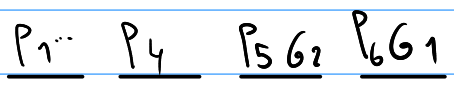
$$|C_{i,j}| = |(C_{i,7} \cup C_{i,8})^c| = |U| - |C_{i,7}| - |C_{i,8}| + |C_{i,7} \cap C_{i,8}|$$

$$|C_{i,7}| = |\{f \in U : \exists i \in P, f(i) = f(7)\}|$$

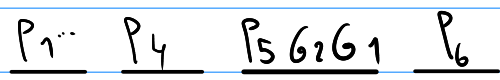
Se para en 3 casos: • Un gato está solo y el otro con algún grupo de perros



• Los gatos están separados y cada uno con algún perro



• Los gatos están juntos con algún perro



Asumimos que los escondites son distinguibles

1er caso: Formas de mandar los gatos a escondites distintos

$$f: G \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ inyectivas } A_2^4 = \frac{4!}{2!} = 12$$

Hay 2 posibilidades: 7 queda solo y 8 no ó 8 queda solo y 7 no.

En ambos casos, no teniendo en cuenta el escondite del que queda solo (cuyo escondite ya está cubierto) tengo que repartir a los 6 perros en los otros 3 escondites de forma sobreyectiva: $\text{Sob}(6, 3)$

$$\text{En total: } 12 \cdot 2 \cdot \text{Sob}(6, 3)$$

Formas de colocar a los gatos \uparrow \uparrow \uparrow Formas de distribuir a los perros
Formas de elegir al gato que queda solo

2do caso: 12 formas de repartir a los gatos. $\text{Sob}(6, 4)$ formas de repartir a los perros tal que en los lugares que no hay gatos haya algún perro y cada gato esté con algún perro. En total: $12 \cdot \text{Sob}(6, 4)$

3er caso: 4 formas de poner a los gatos juntos. $\text{Sob}(6, 4)$ los perros.

$$\text{En total: } 4 \cdot \text{Sob}(6, 4)$$

Los que no cumplen la condición:

$$12 \cdot 2 \cdot \text{Sob}(6, 3) + 12 \cdot \text{Sob}(6, 4) + 4 \cdot \text{Sob}(6, 4)$$

Todas las formas de repartirlos
(el universo): Sob(8,4)

$$\text{Sol: } \boxed{\text{Sob}(8,4) - 24 \text{Sob}(6,3) - 16 \text{Sob}(6,4)}$$

PR.2

Ejercicio 9

¿De cuántas formas se puede partir un conjunto de $2n$ elementos en n conjuntos de 2 elementos?

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \underline{1} \ \underline{2} \} \{ \underline{3} \ \underline{4} \} \{ \underline{5} \ \underline{6} \} \{ \underline{7} \ \underline{8} \} \dots \dots \{ \underline{2n-3} \ \underline{2n-2} \} \{ \underline{2n-1} \ \underline{2n} \} \end{array} \right\}$$

$$\frac{2n!}{(2!)^n n!} = \frac{\cancel{2n}(\cancel{2n-1})\cancel{(2n-2)}(2n-3)\dots\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{n}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{n-1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{n-2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{n-3}}$$

$$= (2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1 = (2n-1)!! \quad (\neq ((2n-1)!)!)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ 1, - \} \{ -, - \} \dots \{ , \} \\ (2n-1) \cdot (2n-3) \dots 1 \end{array} \right\}$$