Ejercicio 7:
Contar la cantidad de ciclos de orden k que hay en la rueda W_n (que consiste en un C_n mas un vértice central unido a los n vértices del ciclo).

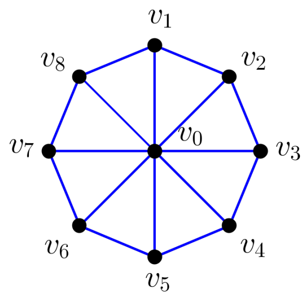

Figura 1: Ejemplo del grafo rueda para $n = 8$

Para W_n y el ciclo C_n usaremos la notación dada en la figura 1. Es decir v_i a los vértices del ciclo “exterior” y v_0 al vértice del centro.

Primero y como introducción al problema, hay dos posibles interpretaciones de ciclos dentro de un grafo a partir de las diferentes bibliografias, una de ellas contarlos como caminos, y otra como subgrafos.

Ciclos en el grafo C_n

En el grafo ciclo C_4 hay un único ciclo como subgrafo (el propio grafo), sin embargo los caminos cerrados $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_1$ y $v_3 \to v_2 \to v_1 \to v_4 \to v_3$ son distintos.

¿Cuántos ciclos hay entonces en C_4 de largo 4?
Como subgrafos hay solo 1.
Para contar ciclos como caminos cerrados simples usaremos la regla del producto.
La cantidad de elecciones posibles para el inicio del vértice es 4 y una vez iniciado el camino hay dos posibles elecciones para la orientación (horaria y antihoraria).
Asi, por ejemplo, la elección del vertice 2 y sentido horario da el camino $v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_1 \to v_2$.
La cantidad de ciclos como caminos en este caso es 4×2.

En general la cantidad de ciclos de largo k en el grafo C_n es 0 si $k \neq n$ y en el caso de que $k = n$ se tiene que C_n tiene un ciclo como subgrafo y tiene $n \times 2$ ciclos, contados como caminos.
En general, para cualquier grafo G, se tiene que cada subgrafo C_k (es decir por cada ciclo de largo k como subgrafo) hay $k \times 2$ ciclos como caminos.

Ciclos de largo k en el grafo W_n

Contaremos primero la cantidad de ciclos como caminos (notemos $a_n(k)$) y luego como subgrafos (notemos $b_n(k)$) pues tenemos la relación entre estos números $a_n(k) = b_n(k) \times 2 \times k$

Notar que un ciclo tiene largo como mínimo 3 y en un grafo de $n+1$ vértices tiene ciclos de largo a lo mas $n+1$. Por lo que $3 \leq k \leq n+1$.

Afirmación: Un ciclo de largo $k < n$ en W_n tiene que pasar por el vértice v_0 pues no hay ciclos de largo distinto de n en C_n.
Comencemos así estudiando el caso $k < n$
Empezemos estudiando los ciclos que se inician en un vertice de C_n (es decir v_i con $i > 0$).
Por la regla del producto podemos descomponer en las siguientes elecciones

1. Inicio del ciclo, n posiblidades
2. Orientación (horaria o antihoraria), 2 posibilidades
3. Cuando pasa por el centro, dado que el ciclo tiene largo k y por tanto k vértices basta elegir en que momento del ciclo aparece el vértice, es decir hay $k-1$ posibilidades para el lugar donde aparece el vertice v_0.

Por ejemplo para $n = 10$ la elección para $k = 6$ si elegimos 2 como inicio, la orientación antihoraria y el momento como 3 para que aparezca v_0 se tiene como ciclo

$$v_2 \to v_1 \to v_{10} \to v_0 \to v_4 \to v_3 \to v_2$$

El caso de los ciclos que se inician en el centro tenemos como elecciones posibles.

1. Elección de a que vértice del C_n se dirige en el primer paso, n posibilidades.
2. Elección de la orientación, 2 posiblidades

Por ejemplo para $n = 10$ la elección para $k = 6$ si elegimos como vertice a ir el vertice v_4 como inicio la orientacion antihoraria se tiene como ciclo

$$v_0 \to v_4 \to v_3 \to v_2 \to v_1 \to v_{10} \to v_0$$

Luego la cantidad de ciclos como caminos es

$$n \times 2 \times (k-1) + n \times 2 = n \times 2 \times k$$

y la cantidad de ciclos como subgrafos es n.

Veamos los casos que faltan ($k = n$ y $k = n+1$).

En el caso de $k = n$ hay que agregar a los posilbles ciclos dentro de C_n, que como se planteo al principio las elecciones posibles son

1. Elegir inicio, n opciones
2. Elegir orientación, 2 opciones

luego la cantidad de ciclos, como caminos, es

$$n \times 2 \times n + 2 \times n = 2 \times n \times (n+1)$$

y por tanto la cantidad de ciclos como subgrafos es $n+1$

Por último para el caso $k = n+1$ el ciclo involucra todos los vértices, pero el conteo es igual al del caso $k < n$ por lo que la cantidad de ciclos como caminos es

$$n \times 2 \times n + n \times 2 = n \times 2 \times (n+1)$$

y la cantidad de ciclos como subgrafos es n.

Extra : Ciclos en el grafo W_n

Para contar la cantidad de ciclos simplemente sumamos los ciclos de largo k para todo $3 \le k \le n+1$.
Cantidad de ciclos como caminos es

$$\sum_{k=3}^{n+1} a_n(k) = \left(\sum_{k=3}^{n-1} n \times 2 \times k\right) + 2 \times n \times (n+1) + n \times 2 \times (n+1) =$$

$$= 2 \times n \times \left(2(n+1) + \sum_{k=3}^{n-1} k\right) = 2 \times n \times \left(2(n+1) + \frac{(n-1)n}{2} - (1+2+3)\right)$$

Mientras que la cantidad de ciclos como subgrafos es

$$\sum_{k=3}^{n+1} b_n(k) = \left(\sum_{k=3}^{n-1} n\right) + n + 1 + n = n(n-3) + 2n + 1 = n^2 - n + 1$$