Principio de inducción implica Principio de buen orden

Debemos probar entonces que todo subconjunto de los naturales no vacío tiene mínimo.

Recordemos que la definicion de minimo es $m = \text{mín}(S)$ si solo si $m \in S$ y para todo $x \in S$ se tiene que $m \leq x$.

Para esto probaremos primero que todo subconjuntos finito cumple esta propiedad y luego utilizaremos esta información para probarlo para un conjunto cualqueira.

Todo subconjunto finito y no vacío de naturales tiene mínimo.

Probaremos esta propiedad por inducción, en la propiedad P todo subconjunto de n elementos tiene mínimo.

Paso base: Todo subconjunto de 1 elemento tiene mínimo.

Basta ver que el mínimo es el único elemento del conjunto.

Paso inductivo:

Hipótesis: Todo subconjunto de naturales de n elementos tiene minimo.

Tesis: Todo subconjunto de naturales de $n+1$ elementos tiene minimo.

Prueba del paso inductivo: Vamos a probar que dado $S \subset \mathbb{N}$ con $n+1$ elementos se cumple que S tiene mínimo.

Sea $x_0 \in S$ consideremos el conjunto $U = S \setminus \{x_0\}$ es decir U es el conjunto que tiene todos los elementos de S salvo x_0. Tenemos entonces que U tiene n elementos, y por tanto tiene mínimo. Sea m el minimo de U.

Como $m \in U$ se tiene que $m \in S$ si $m < x_0$ entonces m es el mínimo de S, si $x_0 < m$ entonces x_0 es el minimo de S.

Para el primer caso basta ver que si $x \in S$ y $x \neq x_0$ entonces $x \in U$ y por tanto $m \leq x$ (mientras que $m < x_0$ era la hipótesis de este caso).

Por otro lado si $x_0 < m$ dado $x \in S$ si $x \neq x_0$ entonces $x \in U$ y por tanto $x_0 < m \leq x$ de donde concluimos que x_0 es el mínimo de S.

Todo subcojuntos de los números naturales no vacio tiene mínimo.

Sea $S \subset \mathbb{N}$ no vacio y $x_1 \in S$.

Consideremos el conjunto $V = \{x \in \mathbb{N} : x \in S \text{ y } x \leq x_1\}$. Es decir V es el subconjunto de S (y por tanto de naturales) que contiene a todos los elementos de S que son menores o iguales a x_1.

Bajo estas condiciones el subconjunto V no es vacio (pues $x_1 \in V$) y es finito, por lo tanto tiene mínimo [es el resultado anterior]. Notemos n al mínimo de V.

Probemos ahora que n es el minimo de S.

Primero, como $V \subset S$ tenemos que $n \in S$.

Sea $x \in S$ si $x > x_1$ entonces $x > x_1 \geq n$. En caso de que $x \leq x_1$ entonces $x \in V$y por tanto $n \leq x$.

Concluimos así que n es el mínimo de S en particular S tiene mínimo.