Matemática Discreta 1

Resolución del examen

Sábado 14 de julio de 2018

Ejercicios de Múltiple Opción

MO1: Una función

$$f : \{1, 2, \ldots, 9\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$$

se denomina función *rayito* si es biyectiva y existe un único n tal que $f(n) > f(n+1)$ (es decir, la función es creciente en todas las posiciones, salvo una). La cantidad de funciones *rayito* es:

A) 8 **B)** 36 **C)** 502 **D)** $9! - 1$

Resolución: El "escalón" se va a dar entre dos elementos del dominio $i, i+1 \in \{1, 2, ..., 9\}$. De los 9 elementos del codominio hay que elegir i elementos que serán imagen de los puntos $\{1, 2, ..., i\}$. Esos i elementos no pueden configurar una sección inicial, es decir, $\{f(1), f(2), ..., f(i)\}$ no puede ser $\{1, 2, ..., i\}$ porque $f(i+1) < f(i)$ y la función tiene que ser biyectiva. Contando casos:

$$\sum_{i=1}^{8} \binom{9}{i} - 1 = 2^9 - 10 = 512 - 10 = 502.$$

MO2: La afirmación:

Si un conjunto parcialmente ordenado P tiene un único elemento maximal, el mismo es máximo.

A) Es falsa para todo P infinito.

B) Es verdadera si P es finito.

C) Es verdadera para todo P infinito.

D) Es falsa para todo P finito.

Resolución: La solución es el ítem B.

Sea m un punto maximal. Si m no es máximo, existe y_1 no comparable con m (por lo tanto $y_1 \neq m$). Como existe un único elemento maximal, entonces y_1 no es maximal. Luego existe $y_2 > y_1$. En particular $y_2 \neq m$. Luego, la unicidad del elemento maximal implica que y_2 no es maximal. Luego existe $y_3 > y_2$. El proceso continúa, obteniendo así una sucesión de elementos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_{n+1} > y_n$, para todo $n \geq 1$, lo cual garantiza en particular que el conjunto de puntos es infinito, contradiciendo el hecho que P es finito. La contradicción proviene de suponer que m no es máximo. Luego hemos probado que m, el único elmento maximal, es máximo.

La opción A es falsa. Contraejemplo a la afirmación: $P =$ enteros negativos. Es un conjunto infinito y tiene máximo (-1).
La afirmación C es falsa, considérese $P = \mathbb{Z}$.
La afirmación D es falsa: contradice B que fue demostrada verdadera.

MO3: En una penca del mundial de cierto país para la fase de grupos se dio dos puntos extras para aquellos que embocaran la cantidad total de goles recibidos y goles marcados por su selección en los tres partidos. En total el equipo convirtió tres goles y recibió cinco. ¿De cuántas formas se podía embocar el resultado?

A) 10 **B)** 21 **C)** 31 **D)** 210.

Resolución: Es la cantidad de soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, multiplicado por la cantidad de soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 = 5$, o sea $\binom{3+3-1}{3}\binom{5+3-1}{5} = \frac{5\cdot 4}{2!}\frac{7\cdot 6}{2!} = 10 \cdot 21 = 210$.

MO4: El coeficiente de x^6 del polinomio $(1 + x - x^2)^6$ es:

A) -151 **B)** 40 **C)** 41 **D)** 151.

Resolución:

El coeficiente en x^6 de $(1 + x - x^2)^6$ es:

$$\sum_{a,b,c:a+b+c=6,\ b+2c=6} \binom{6}{a\ b\ c}(-1)^c =$$

$$\sum_{a,b,c:a+b+c=6,\ b+2c=6} \binom{6}{a\ 6-2c\ c}(-1)^c$$

Luego $a = 6-(b+c) = 6-(6-c) = c$, entonces:

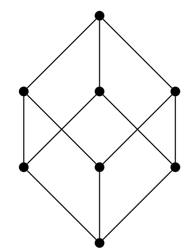
$$\sum_{c=0}^{3} \binom{6}{c\ 6-2c\ c}(-1)^c = \sum_{c=0}^{3} \frac{6!}{c!c!(6-2c)!}(-1)^c =$$

$$= \frac{6!}{0!0!6!} - \frac{6!}{1!1!4!} + \frac{6!}{2!2!2!} - \frac{6!}{3!3!0!} =$$

$$= 1 - 30 + 90 - 20 = 41.$$

(donde $\binom{m}{x\ y\ z}$ significa Permutaciones de m elementos con repeticiones x, y, z veces, con $x + y + z = m$).

MO5: Sea H el diagrama de Hasse que se muestra en la figura, y $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. El número de órdenes parciales sobre A que pueden ser representados por H y donde a es un elemento minimal es



A) 1680 **B)** 5040 **C)** 840 **D)** 70.

Resolución: Hay una sola ubicación para a que es en el único mínimo del conjunto. Luego los otros tres elementos de la primer fila se pueden elegir de $\binom{7}{3}$ formas distintas. Una vez elegidos, los otros cuatro se pueden elegir de 4! formas distintas, dando un total de

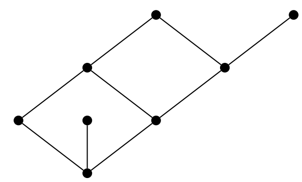
$$\binom{7}{3} \cdot 4! = \frac{7!}{3!4!} \cdot 4! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio de Desarrollo 1:

a) Demostrar que todo grafo conexo posee un subgrafo recubridor conexo y plano.

b) Hallar la cantidad de subgrafos recubridores conexos planos del grafo de la figura:



Resolución:

a) Todo grafo conexo posee un subgrafo árbol recubridor (ver eórico), y como todo árbol es conexo y es plano, se deduce que posee un subgrafo en las condiciones pedidas.

b) Como el subgrafo debe ser conexo y hay 8 vértices, tiene que tener al menos 8-1=7 aristas. El grafo de la figura tiene 9 aristas, así que los subgrafos recubridores conexos se obtienen sacando 0,1 o 2 aristas.
Quitando 0 aristas: 1 solo subgrafo.
Quitando 1 arista: 7 subgrafos (solo se pueden sacar aristas de ciclos, y hay dos ciclos de largo 4 con un arista en común).
Quitando 2 aristas: $1 \times 6 + 3 \times 3 = 15$, dividiendo los casos según se saque la arista común a los dos ciclos o no.
Total: 1+7+15=23 subgrafos recubridores conexos planos.

Ejercicio de Desarrollo 2:

En un grafo plano anotaremos v al número de vértices, e al número de aristas y c al número de caras (en una inmersión plana del mismo).

a) Demostrar por Inducción Completa que para todo grafo plano conexo (no multigrafo) se cumple

$$v - e + c = 2.$$

b) Demostrar que todo grafo plano con 3 componentes conexas con una inmersión plana que encierra 4 regiones (incluyendo la de área infinita) y tiene 9 aristas, posee siempre la misma cantidad de vértices y hallar dicha cantidad.

Resolución:

a) Inducción en el número de aristas. Si el grafo tiene exactamente **una** arista o bien es K_2 o bien es un vértice con un lazo. En ambos casos se cumple la ecuación: $2 - 1 + 1 = 2$, y $1 - 1 + 2 = 2$. Asumamos que el resultado vale para grafos conexos planos con m aristas o menos. Consideramos un grafo conexo plano con $m + 1$ aristas. Si es un árbol, entonces $c = 1$ y $v = e + 1$, de donde

$v-e+c=e+1-e+1=2$. Si no es un árbol, como el grafo es conexo, entonces posee un ciclo o lazo. Sacando una arista del ciclo, se mantiene la conexión del grafo, y reducimos la cantidad de aristas y caras en uno cada una, de donde podemos aplicar la hipótesis inductiva y deducir que $v'-e'+c'=2$, pero $v'=v$, $e'=e-1$ y $c'=c-1$ de donde $v-(e-1)+(c-1)=2$ con lo cual $v-e+c=2$.

b) Agregando un vértice y tres aristas uniendo ese vértice con cada componente, obtenemos un nuevo grafo, ahora conexo, manteniendo la planaridad y también la cantidad de caras. Luego, aplicando la ecuación del punto anterior obtenemos $v+1-(9+3)+4=2$, con lo cual $v=9+2-1+3-4=9$. Por lo tanto, necesariamente el grafo original debe tener nueve vértices.

Ejercicio de Desarrollo 3:

Resolver la siguiente ecuación en recurrencia

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n$$

con $n \geq 2$; $a_0 = a_1 = 1$.

Resolución:

La ecuación característica es: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, cuyas raíces son: 1 y 2. Luego la solución general de la homogénea es:

$$a_n^H = A(1)^n + B(2)^n.$$

Entonces una solución particular será de la forma $a_n^P = K.n.2^n$, de donde

$$Kn.2^n - 3K.(n-1).2^{n-1} + 2K(n-2)2^{n-2} = 2^n \quad \forall n \geq 2.$$

con lo cual se tiene:

$$4Kn.2^{n-2} - 6K.n.2^{n-2} + 2.K.n.2^{n-2} + 6.K.2^{n-2} - 4.K.2^{n-2} = 4.2^{n-2}.$$

de donde $K=2$ y $a_n^P = 2.n.2^n$. La solución general será

$$a_n = A + B.2^n + 2.n.2^n.$$

Luego, teniendo en cuenta las condiciones iniciales nos da

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A+2.B=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=5 \\ B=-4 \end{cases}$$

Así que la solución es

$$a_n = 5 + (n-2)2^{n+1}.$$