Primer parcial de Matemática Discreta 1

Miércoles 27 de setiembre de 2017

Ejercicios de desarrollo (total 15 puntos)

Solución 1. *Considerar la desigualdad:* $\sqrt{n^3+4} < (n-1)(n+2)$.

a. *Hallar el menor natural para el cual la desigualdad es válida.*
Observar que para n=0 y n=1 no es válida la desigualdad. Sin embargo para $n = 2$ tenemos $\sqrt{2^3+4} = \sqrt{12} < (2-1)(2+2) = 4$, pues $12 < 16$.

b. *Demostrar por inducción completa la desigualdad, a partir de la base inductiva hallada en la parte anterior.*
La base indcutiva es $n = 2$ ya fue hallada en el ítem anterior.
Hipótesis de inducción completa: para $n = h$ vale que $\sqrt{h^3+4} < (h-1)(h+2)$. Observar que la hipótesis es equivalente a la desigualdad: $(h^3+4) \leq (h-1)^2(h+2)^2$.

Tesis de inducción completa: la desigualdad también es válida para $n = h+1$, o sea,

$$\sqrt{(h+1)^3+4} < ((h+1)-1)((h+1)+2),$$

la cual es equivalente a

$$(h+1)^3+4 < ((h+1)-1)^2((h+1)+2)^2.$$

Esta última desigualdad es equivalente a:

$$h^3+4+(3h^2+3h+1) < (h-1)^2(h+2)^2 + [h^2(h+3)^2 - (h-1)^2(h+2)^2].$$

Por hipótesis de la IC tenemos que

$$(h^3+4) \leq (h-1)^2(h+2)^2$$

por lo cual sería suficiente (no equivalente, pero sí suficiente) probar que

$$3h^2+3h+1 < h^2(h+3)^2 - (h-1)^2(h+2)^2.$$

Para probar esto último, hacemos cuentas y transformamos en forma equivalente en:

$$3h^2+3h+1 < 4h^3+9h^2+h-3 \iff 0 < 4h^3+9h^2+h-3.$$

Como $h \geq 2$, entonces $4h^3 \geq 32$, $9h^2 \geq 36$ y $h \geq 2$, con lo cual se obtiene el resultado.

Solución 2. *Considerar la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 3, 4, ..., n + 2, ...)$. *Hallar la función generatriz asociada a* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Recordemos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, ..., 1, ...)$ está asociada a la función generatriz $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$
Luego $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n + 1)x^n + ...$ O sea que $\frac{1}{(1-x)^2}$ tiene asociada la sucesión $(1, 2, 3, 4, ..., n + 1, ...)$. Finalmente, para obtener la sucesión buscada debemos operar sobre: $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n + 1)x^n + ...$, y obtenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} - 1 = 2x + 3x^2 + ... + (n + 1)x^n + ...,$$

con lo cual

$$\frac{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}{x} = 2 + 3x + 4x^2 ... + (n + 2)x^n + ...$$

O sea, la función generatriz asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 3, 4, ..., n + 2, ...)$. es

$$h(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}{x} = \frac{-x^2 + 2x}{x(1-x)^2} = \frac{-x + 2}{(1-x)^2}.$$

[El resultado muestra otro camino para hallar el resultado: $2+3x+4x^2+...+(n+2)x^n+... = 2(1 + 2x + 3x^2 + ... + (n + 1)x^n + ...) + (-x)(1 + 2x + 3x^2 + ... + (n + 1)x^n + ...) = 2 \times \frac{1}{(1-x)^2} + (-x) \times \frac{1}{(1-x)^2}$]

Los problemas del 1 al 5 son de múltiple opción (total 20 puntos). Correcta: 4 puntos, Incorrecta: -1 punto, sin responder: 0 punto.

1. La *ruleta tricolor* tiene n casilleros en círculo ($n \geq 3$), numerados desde 1 hasta n, cada uno de ellos pintados de color rojo, azul o blanco. Definimos a_n como la cantidad de formas de pintar la ruleta de n casilleros, de forma que no haya dos casilleros contiguos del mismo color. El valor de a_{50} es:

A. $2^{49} - 2$ **C**. $3 \cdot 2^{49}$

B. $3 \cdot 2^{48}$ **D**. Solución: $2^{50}+2$.

2. La cantidad de soluciones a la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$

con $0 \leq x_i$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$, con $x_2 \leq 8$, $4 \leq x_3$, y $x_4 \leq 7$ es:

A. 3074 **C**. 1674

B. Solución: 1044 **D**. 2444

3. Sea el conjunto

$$S = \{7, 11, 15, 19, \ldots, 95, 99, 103\}.$$

¿Cuántos elementos tenemos que tomar de S para asegurar que al menos dos sumen 110?

A. 15. **B**. 13. **C**. 12. **D**. Sol: 14.

4. La cantidad de funciones

$$f : \{1, 2, \ldots, 11\} \to \{1, 2, \ldots, 10\}$$

sobreyectivas tales que $f(1) = 1$ o $f(2) = 1$ es:

A. $\mathrm{Sob}(10, 10) + 2\,\mathrm{Sob}(10, 9) + \mathrm{Sob}(9, 9)$

B. Solución: $2\,\mathrm{Sob}(10, 10) + 2\,\mathrm{Sob}(10, 9) - \mathrm{Sob}(9, 9)$

C. $\mathrm{Sob}(10, 10) + 2\,\mathrm{Sob}(10, 9) - \mathrm{Sob}(9, 9)$

D. $2\,\mathrm{Sob}(10, 10) + 2\,\mathrm{Sob}(10, 9) + \mathrm{Sob}(9, 9)$

5. En una clase de 20 niños la profesora de Educación Física quiere armar 4 equipos de 5 niños cada uno para un torneo de fútbol. Los equipos lucirán camisetas azules, rojas, verdes y blancas ¿De cuántas maneras puede formar los equipos si Amalia quiere jugar en el mismo que Brian?

A. Solución: $\frac{4 \cdot 18!}{(5!)^3 \cdot 3!}$ **C**. $\frac{18!}{(5!)^3 \cdot 3!}$

B. $\frac{4 \cdot 18!}{(5!)^4}$ **D**. $\frac{18!}{(5!)^4}$