Solución Examen - Matemática Discreta I

Sábado 15 de julio de 2017

M01	M02	M03	M04	M05
D	X	C	C	A

Problema de Desarrollo 1

Probar que todo árbol tiene al menos dos hojas.

Solución - Desarrollo 1

Sea T un árbol cualquiera (se excluye el árbol trivial de un solo vértice), y sean x_1, x_2 dos vértices de T cuya distancia alcanza el diámetro. Probemos que x_1 y x_2 son hojas. En efecto, supongamos por absurdo que $gr(x_1) \geq 2$. Sea $P = x_1, y_1, \ldots, y_r, x_2$ el único camino simple que conecta x_1 con x_2 (si no fuese único el grafo tendría ciclos, y no sería árbol). Entonces, x_1 es adyacente a y_1 y a otro vértice; z. Veremos que la distancia entre z y x_2 supera el diámetro. En efecto, el único camino entre z y x_2 es $P_2 = (z, x_1) \cup P$, cuyo largo es uno más que P. Esto contradice la definición de diámetro, y por lo tanto x_1 debe ser una hoja. El razonamiento es análogo para x_2.

Problema de Desarrollo 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido con m aristas, n vértices y k componentes conexas:

- El *corango* de G es $c(G) = m - n + k$.
- La *conectividad* de G, denotada $\mu(G)$, es la menor cantidad de aristas que se deben eliminar para que el grafo deje de ser conexo (si no es conexo $\mu(G) = 0$).

(a) Probar que $c(G) = 0$ si y solo si G es acíclico.

(b) Sea G conexo. Mostrar que si G es un árbol o un ciclo entonces $\mu(G) > c(G)$.

(c) ¿El recíproco es cierto? Probar o dar un contrajemplo.

Solución - Desarrollo 2

(a) Sea G un grafo acíclico. Cada componente conexa es un árbol, que verifica tener una arista menos que el número de vértices. Sumando en sus k componentes conexas resulta que $m = n - k$. Luego, todo grafo acíclico tiene corango $c(G) = m - n + k = 0$. Recíprocamente, si un grafo G tiene corango $c(G) = m - n + k = 0$, entonces $m = n - k$. Se observa que cada componente conexa G_i de G verifica $m_i \geq n_i - 1$, es decir, por conexidad tiene al menos el número de aristas de un árbol. Sumando en componentes tenemos que $m \geq n - k$. La única manera de tener igualdad es si todas las componentes verifican $m_i = n_i - 1$. Esto se consigue únicamente si cada componente es un árbol, es decir, si G es acíclico.

(b) Los ciclos tienen conectividad 2 y corango 1. Los árboles tienen conectividad 1 corango 0. Ambos casos verifican que $\mu(G) > c(G)$.

(c) Busquemos todos los grafos G tales que $\mu(G) > c(G)$. Claramente G debe ser conexo, pues $\mu(G) > 0$. Por la parte (a), los únicos grafos con $c(G) = 0$ son árboles, y verifican la desigualdad. Si $c(G) = 1$ precisamos $\mu(G) \geq 2$. Como $c(G) = 1$ tenemos $m = n$, y los únicos grafos conexos con $m = n$ y conectividad superior a 1 son los ciclos C_n. Finalmente, si $c(G) \geq 2$ veremos que no existen grafos que cumplen $\mu(G) > c(G)$. Por definición de conectividad se deduce que $\mu(G) \geq gr(v_i)$ para todo vértice v_i, y por Handshaking tenemos que $2m \geq n\mu(G)$. Si $\mu(G) > c(G) \geq 2$, por definición de corango tendríamos que:

$$2(n-1) + 2\mu(G) > 2(n-1) + 2c(G) = 2m \geq n\mu(G),$$

y despejando tendríamos que $\mu(G) < 2\frac{(n-1)}{(n-2)}$. Esta búsqueda de nuevos grafos (que no son ciclos ni árboles) toma sentido cuando $n \geq 4$, y en este caso tenemos que $\mu(G) < 2\frac{(4-1)}{(4-2)} = 3$. Pero esta desigualdad contradice que $\mu(G) > c(G) \geq 2$, y los únicos grafos tales que $\mu(G) > c(G)$ son árboles y ciclos.

Múltiple Opción 1
Contar la cantidad de palabras, con o sin sentido, que se pueden obtener permutando las letras de la palabra ALGORITMO, de modo que no hayan vocales juntas. Por ejemplo, LOGARITMO se debe contar, pero RITMOALGO no: A) 21300; B) 21400; C) 21500; D) 21600.

Solución MO1
Ordenamos las vocales y luego intercalamos consonantes. Hay $4!/2! = 12$ maneras de ordenar las 4 vocales $\{A, O, I, O\}$. Hay 5 lugares para ubicar las 5 consonantes diferentes, y deben existir consonantes entre las vocales. Luego, las maneras de ubicar consonantes se corresponde con sus 5! permutaciones, multiplicadas por la cantidad de soluciones naturales de $\sum_{i=1}^{5} x_i = 5$ con $x_i \geq 1$ para $i = 2, 3, 4$. Restando tres unidades en cada miembro se ve que la cantidad de soluciones naturales coincide con $CR_2^5 = C_2^6 = 15$. El resultado es entonces $12 \times 120 \times 15 = 21600$, y la respuesta correcta es la *D*.

Múltiple Opción 2
Hallar la cantidad de palabras binarias de largo 7 que no contienen la subcadena 000:
A) 44; B) 68; C) 136; D) 248.

Solución MO2
Sea a_n la cantidad de palabras de largo n que no tienen la cadena 000. Razonando de manera recursiva se deduce que $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$, con $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$. Mediante evaluación se tiene que $a_4 = 13$, $a_5 = 24$, $a_6 = 44$, $a_7 = 81$.

Debido a error de tipeo no hay opción correcta, y se darán los 10 puntos de la MO2 a todos los estudiantes. Además, no se restarán puntos por respuestas incorrectas en toda la múltiple opción.

Múltiple Opción 3
El polinomio cromático del rayo de 4 aristas W_4 evaluado en 3 vale: A) 4; B) 5; C) 6; D) 7.

Solución MO3
Recordemos que el cono $\mathcal{C}(G)$ de un grafo G es un nuevo grafo que tiene un vértice más que G que está conectado con todos los vértices de G. El polinomio cromático de $\mathcal{C}(G)$ verifica $P(\mathcal{C}(G), \lambda) = \lambda \times P(G, \lambda - 1)$, pues podemos pintar al vértice distinguido con λ colores y el resto del grafo con $\lambda - 1$ colores.

Se pide hallar el polinomio cromático de W_4, que es el grafo cono de C_4. El polinomio cromático de C_4 evaluado en $3 - 1 = 2$ vale 2. Luego, el resultado es $3 \times 2 = 6$, y la opción correcta es la *C*.

Múltiple Opción 4
El grafo bipartito completo $G = K_{(n.n)}$ con $n \geq 3$ impar verifica una de las condiciones:
A) G es plano y Hamiltoniano; B) G es plano y no es Hamiltoniano;
C) G no es plano y es Hamiltoniano; D) G no es plano ni Hamiltoniano.

Solución MO4
Tales grafos admiten un subgrafo homeomorfo a $K_{(3,3)}$. Por Kuratowski no son planos. La suma de grados de dos vértices no adyacentes cualesquiera alcanza el orden del grafo. Luego, tales grafos son Hamiltonianos, y la respuesta correcta es la *C*.

Múltiple Opción 5
Sea (c_n) la convolución entre $a_n = n + 1$ y $b_n = 2^n$. La función generatriz $c(x)$ de (c_n) es:
A) $c(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-x)^2}$; B) $c(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-x)}$; C) $c(x) = \frac{1}{(1-2x)^2(1-x)^2}$; D) $c(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)^2}$.

Solución MO5
La generatriz de la convolución es $c(x) = a(x)b(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1-2x}$. La opción correcta es la *A*.