Matemática Discreta I

Solución del exámen

Ingeniería en Computación

Jueves 22 de Diciembre de 2016

EJERCICIO 1 ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RK? Opciones: A) 7!; B) 8!; C) $7! \times 6$; D) $\dfrac{7!}{2!}$; E) $7! \times 7$.

Solución: Si contamos todas las palabras que comienzan con vocales, elegimos una vocal y luego permutamos el resto de las letras, notando que hay dos K: $2! \times \frac{8!}{2!} = 8!$. Luego contamos las palabras que comienzan en vocal y que tienen la secuencia RK, considerando como un único símbolo a RK (notemos que ya no hay dos símbolos K iguales): $2! \times 7!$. Luego tenemos que restarle a todas las palabras que comienzan con vocales, las que tienen la secuencia RK: $8! - 2! \times 7! = 7! \times 6$. Por lo que la respuesta correcta es la C.

EJERCICIO 2 Sea $A = \{n \in \mathbb{Z} : 3 \leq n \leq 96 \quad \text{y } n \text{ es múltiplo de } 3\}$. Tenemos en A la relación de orden parcial definida por $n\mathcal{R}m$ si n divide a m. Entonces: Opciones:
A) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 5, la anticadena más larga tiene largo 11.
B) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo 14.
C) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo mayor a 14.
D) Hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo 11.
E) Ninguna de las anteriores.

Solución: Si pensamos en el diagrama de Hasse, es fácil notar que no posee máximo, dado que por ejemplo 96 no se relaciona con nadie, así que si existe máximo, debería ser 96, pero también existe 93, y 93 no se relaciona con 96, por lo que no existe máximo. Luego podemos observar que la cadena más larga tiene largo 6 y esta formada por {3-6-12-24-48-96} = {3-3.2-3.2.2-3.2.2.2-3.2.2.2.2-3.2.2.2.2.2}. Ahora veamos que existe una anticadena de largo 15, formada por: {3.17-3.19-3.23-3.29-3.31-3.13-3.11-3.3.3-3.3.5-3.3.7-3.2.7-3.2.5-3.2.3-3.2.2-3.5.5} = {51-57-69-87-93-39-33-27-45-63-42-30-18-12-75}. Por lo que la respuesta correcta es la C.

EJERCICIO 3 Suponga que desarrollamos la expresión $(x+y+z)^n$ y que los términos son reunidos de acuerdo a las reglas elementales del álgebra, por ejemplo, $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$. ¿Cuál es el número de términos resultantes en la fórmula? Opciones: A) $\binom{n+2}{n}$; B) $\binom{n+1}{2}$; C) $n(n+1)$; D) $3!\binom{n}{2}$; E) $\binom{n+3}{n}-4$.

Solución: El problema es análogo a repartir en 3 cajas distintas (las variables x, y, z) n objetos iguales (los factores $(x+y+z)$), esto es $CR^3_n = \binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n}$. Por lo tanto la respuesta correcta es la A.

EJERCICIO 4 ¿Cuántos enteros en el conjunto $\{1,2,3,4, \ldots, 360\}$ tienen al menos un divisor primo en común con 360? Opciones: A) 122; B) 244; C) 264; D) 294; E) 324.

Solución: Observemos que $360 = 2.2.2.3.3.5$, por lo tanto los divisores primos comunes que pueden tener los elementos del conjunto son solamente 2, 3 y 5. Ahora veamos cuantos números del conjunto, no son múltiplos ni del 2, ni del 3, ni del 5. Para esto definamos $N(c_i)$: cantidad de elementos que cumplen la propiedad c_i, $N(\overline{c_i})$: cantidad de elementos que cumplen la propiedad c_i, c_i : elementos que son múltiplos de i y pertenecen al conjunto $\{1,2,3,4, \ldots, 360\}$. Ahora buscamos $N(\overline{c_2 c_3 c_5})$ y sabemos que por el principio de inclusión-exclusión $N(\overline{c_2 c_3 c_5}) = 360 - N(c_2) - N(c_3) - N(c_5) + N(c_2 c_3) + N(c_2 c_5) + N(c_3 c_5) - N(c_2 c_3 c_5) = 360 - 180 - 120 - 72 + 60 + 36 + 24 - 12 = 96$. Por último lo que en realidad queremos son los elementos que tienen al menos un factor primo 2, 3 o 5: $360 - N(\overline{c_2 c_3 c_5}) = 360 - 96 = 264$. Por lo que la respuesta correcta es la C.

EJERCICIO 5 Encuentre el coeficiente de x^{2016} en la función generatriz

$$f(x) = \frac{1}{(1+5x)^2}$$

Opciones: A) 5^{2016}; B) 2016×5^{2016}; C) 2016×5^{2017}; D) 2017×5^{2016}; E) $2016 \times (-5)^{2017}$.

Solución: Recordemos el teorema del binomio generalizado: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$ con $n \in \mathbb{Z}$, y que $\binom{-n}{i} = CR_i^n(\text{-}1)^i$ con $n \in \mathbb{N}$. Ahora apliquemos el teorema a

$$f(x) = \frac{1}{(1+5x)^2} = (1+5x)^{-2}$$

por lo que tenemos que $(1+5x)^{-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2}{i} (5x)^i 1^{-2-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2}{i} 5^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^2 (-1)^i 5^i x^i$. Luego buscamos el coeficiente de x^{2016} : por lo que $i = 2016$, entonces el coeficiente es $CR_{2016}^2 5^{2016} = \binom{2017}{2016} 5^{2016} = 2017 \times 5^{2016}$. Por lo que la respuesta correcta es la D.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 50 puntos)

Justifique su respuesta en cada uno de los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 6 *(15 puntos)* Pruebe que todo grafo (simple) tiene dos vértices del mismo grado.

Solución:

Suponga que el grafo tiene n vértices. Cada vértice está conectado con 0, 1, 2, 3, $\ldots$, $n-2$ o con $n-1$ vértices. Si uno conecta con $n-1$ vértices, entonces todos los vértices tendrán grado ≥ 1. Luego, en un grafo, es imposible que haya simultáneamente un vértice de grado 0 y otro de grado $n-1$. Por lo tanto, hay máximo $n-1$ grados para escoger y hay n vértices. Por el principio del palomar, por lo menos dos vértices tienen el mismo grado.

EJERCICIO 7 *(15 puntos)* Dados $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ conjuntos parcialmente ordenados y una función $f : A \to B$ decimos que f es creciente si $\forall x, y \in A$, $x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y)$. Supongamos que $\leq_1$ es un orden total en A.

1. Probar que si $f : A \to B$ es creciente y biyectiva entonces $\leq_2$ es un orden total en B. ¿Es cierto esto si f es solo sobreyectiva?
2. Probar que si $f : A \to B$ es creciente, inyectiva y $|A| = n$, entonces existe en B una cadena de n elementos. ¿Es cierto esto si f no es inyectiva?

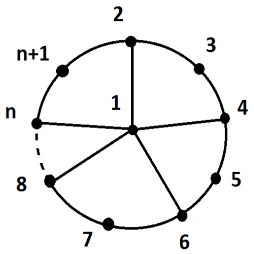
Solución:

1. Dados $z, w \in B$, como f es biyectiva existen $x, y \in A$ tales que $f(x) = z$, $f(y) = w$. Como $\leq_1$ es un orden total en A, o bien $x \leq_1 y$ o $y \leq_1 x$, supongamos que $x \leq_1 y$ (el otro caso es análogo), como f es creciente $f(x) \leq_2 f(y)$, y por lo tanto, $z \leq_2 w$.

   Si f es solo sobreyectiva el resultado también es válido, la demostración no utiliza la inyectividad de f.
2. El conjunto $f(A) \subset B$ es una cadena de n elementos, en efecto, como $f : A \to f(A)$ es biyectiva, la parte anterior asegura que $\leq_2$ es un orden total en $f(A)$.

   Si f no es inyectiva el resultado no es cierto, si $|B| < n$ no puede haber una cadena de n elementos en B.

EJERCICIO 8 *(20 puntos)* En el siguiente grafo de $n + 1$ vértices (asumir n par), el vértice 1 está unido por una arista con cada vértice par.



1. Plantee un sistema de relaciones de recurrencias que determine el número de caminos distintos de longitud k en el grafo.
2. ¿Cuántos caminos de longitud k empiezan en vértices etiquetados con números pares?
3. ¿Cuántos caminos distintos de longitud k hay en el grafo (en función de n)?
4. ¿Cuántos caminos distintos de longitud 3 hay en el grafo (en función de n)?

Nota 1: Para este ejercicio considere que un camino y su reverso son distintos.
Nota 2: La cantidad de caminos de longitud cero es cero.

Solución:

Sea

a_k: la cantidad de caminos distintos de longitud k que empiezan en vértices etiquetados con números pares.
b_k: la cantidad de caminos distintos de longitud k que empiezan en el vértices 1 (el del centro).
c_k: la cantidad de caminos distintos de longitud k que empiezan en los demás vértices (impares a partir del 3).

1. Todo vértice par está conectado con dos impares y con el vértice del centro. Así, $a_k = 2c_{k-1} + b_{k-1}$. El vértice 1, está conectado solo con los $\frac{n}{2}$ vértices pares. Así, $b_k = \frac{n}{2}a_{k-1}$. Todo vértice impar (a partir del 3) está conectado solo con dos pares. Así, $c_k = 2a_{k-1}$. Como para este ejercicio se está considerando que un camino es distinto a su reverso, entonces la solución será: $a_k + b_k + c_k$.

2. Resolvamos el sistema para a_k. De lo anterior, $a_k = 4a_{k-2} + \frac{n}{2}a_{k-2}$. La ecuación característica asociada es $r^2 - (4 + \frac{n}{2}) = 0$, con soluciones $\alpha = \sqrt{4 + \frac{n}{2}}$ y $-\alpha = -\sqrt{4 + \frac{n}{2}}$. Luego, $a_k = A\alpha^k + B(-\alpha)^k$. Por hipótesis, $a_0 = 0 = A + B$, luego $B = -A$. Los caminos de longitud 1 que empiezan en vértices pares, son exactamente, todas las

aristas. Luego, $a_1 = 3\frac{n}{2} = A\alpha - B\alpha$, de donde $A = \frac{3n}{4\alpha}$ y $B = -\frac{3n}{4\alpha}$. Así, la cantidad de caminos distintos de longitud k que empiezan en vértices pares es,

$$a_k = \frac{3n}{4\alpha}\alpha^k - \frac{3n}{4\alpha}(-\alpha)^k = \frac{3n}{4}\alpha^{k-1} + (-1)^{k+1}\frac{3n}{4}\alpha^{k-1} = \frac{3n}{4}\alpha^{k-1}(1 + (-1)^{k+1})$$

.

3. De nuevo, como estamos suponiendo que un camino es distinto a su reverso, la cantidad de caminos distintos de longitud k en el grafo es

$$a_k + b_k + c_k = \frac{3n}{4}\alpha^{k-1}(1 + (-1)^{k+1}) + (\frac{n}{2} + 2)\frac{3n}{4}\alpha^{k-2}(1 + (-1)^k)$$

4. La cantidad de caminos distintos de longitud 3 en el grafo es

$$a_3 + b_3 + c_3 = \frac{3n}{2}\alpha^2 = \frac{3n}{2}(4 + \frac{n}{2})$$

.