29 de septiembre de 2016.

Soluciones del primer parcial
Matemática Discreta 1. Semestre par 2016.

Problema de desarrollo

Pruebe por inducción que en el triángulo de Pascal, al sumar los primeros n elementos de la k-ésima diagonal se tiene la siguiente relación,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{i} = \binom{k+n+1}{n}, \quad \forall n \geq 0$$

.

Solución:

1. Paso base: n=1
   $\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} = 1 + k + 1 = k + 2 = \binom{k+2}{1}$
2. Paso inductivo:
   $H_{ind} : \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{i} = \binom{k+n+1}{n}$
   $T_{ind} : \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \binom{k+i}{i} = \binom{k+n+2}{n+1}$

   Demostración:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{k+i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{i} + \binom{k+n+1}{n+1} = \binom{k+n+1}{n} + \binom{k+n+1}{n+1} =$$

$$\frac{(k+n+1)!}{(k+1)!n!} + \frac{(k+n+1)!}{k!(n+1)!} = \frac{(n+1)(k+n+1)!}{(k+1)!(n+1)!} + \frac{(k+1)(k+n+1)!}{(k+1)!(n+1)!} =$$

$$\frac{(k+n+1)!(k+n+2)}{(k+1)!(n+1)!} = \frac{(k+n+2)!}{(k+1)!(n+1)!} = \binom{k+n+2}{n+1}.$$

Ejercicio

¿Cuántas palabras podemos formar de 6 letras usando las letras de MAMADERA utilizando todas las M y todas las A (por ejemplo MARAMA es válida pero MADERA no es válida)?

(A) 120 (B) 180 (C) 240 (D) 30 (E) 60

Solución:

La respuesta correcta es la B:
Al tomar todas las A y todas las M tenemos 5 letras en total, por lo que tenemos

que elegir de las 3 letras faltantes una más. Luego tenemos que permutar las 6 letras tomando en cuenta las que están repetidas, por lo tanto $\frac{6!}{3!2!} \times \binom{3}{1} = 180$

Ejercicio

Juan quiere guardar 10 libros diferentes en 7 estantes vacíos diferentes y quiere que al menos 5 de ellos no queden vacíos. ¿De cuántas maneras puede realizar esta tarea?

(A) $Sob(10,7) + Sob(10,6)\binom{7}{6} + Sob(10,5)\binom{7}{5}$

(B) CR_5^7

(C) CR_7^5

(D) $S(10,7) + S(10,6)\binom{7}{6} + S(10,5)\binom{7}{5}$

(E) $Sob(10,7) + Sob(10,6) + Sob(10,5)$

Solución:

La respuesta correcta es la A:
Como los libros y los estantes son diferentes, podemos pensar este problema como conteo de funciones, donde los 10 libros son el conjunto partida y los 7 estantes el conjunto de llegada. Tenemos que tener en cuenta que al menos 5 estantes no van a quedar vacíos, por lo tanto podemos separar el problema en 3: 5 estantes no vacíos, 6 estantes no vacíos y 7 estantes no vacíos. En cada subproblema tenemos que elegir los 'i' estantes que no van a quedar vacíos y tomar funciones sobreyectivas de 10 a i. Por esto la solución es $Sob(10,7) + Sob(10,6)\binom{7}{6} + Sob(10,5)\binom{7}{5}$.

Ejercicio

Cuatro grandes ladrones han robado una colección de 13 diamantes idénticos. Luego del hábil robo, discutieron cómo repartir el lote. Tres de ellos tienen TOCs particulares: uno no quiere más de 2 diamantes, otro solo acepta múltiplos de 3 y otro solo acepta cantidad impar mayor o igual a 3.

La cantidad de maneras de distribuir los diamantes de acuerdo a las condiciones es:

(A) 0 (B) 40 (C) 49 (D) 16 (E) 36

Solución:

La respuesta correcta es la E:
Podemos modelar el problema como el coeficiente de x^{13} en $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{13} + \ldots).(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots).(1 + x + x^2).(x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)$ Si sustiuimos cada polinomio por sus funciones generatrices nos queda: $\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^3}.\frac{1-x^3}{1-x}.\frac{x^3}{1-x^2}$

Simplificando nos queda la función generatriz: $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} . \dfrac{x^3}{1-x^2}$
Aplicando la fórmula de convolución a este producto de funciones, obtenemos que el coeficiente de x^{13} en $f(x)$ es 36

Forma alternativa:

$f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} . \dfrac{x^3}{1-x^2} = (1-x)^{-2} . (1-x^2)^{-1} . x^3$
Recordando el teorema del binomio, podemos escribir $(1-x)^{-2} = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^2 x^i$ y $(1-x^2)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^1 x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}$
Ahora basta elegir adecuadamente los índices de las sumatorias para tomar los términos que su producto aporte al coeficiente de x^{10}:
$CR_{10}^2 x^{10} \times x^0$, $CR_8^2 x^8 \times x^2$, $CR_6^2 x^6 \times x^4$, $CR_4^2 x^4 \times x^6$, $CR_2^2 x^2 \times x^8$, $CR_0^2 x^0 \times x^{10}$
Luego el coeficiente de x^{10} es $CR_{10}^2 + CR_8^2 + CR_6^2 + CR_4^2 + CR_2^2 + CR_0^2 = \binom{11}{10} + \binom{9}{8} + \binom{7}{6} + \binom{5}{4} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1} = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36$

Ejercicio

Cuatro amigos van a un restorán. Piden dos platos de ravioles, uno de ñoquis, uno de canelones, una copa de vino, tres botellas de agua mineral sin gas, un flan, un lemon pie, una mousse de chocolate y una ensalada de frutas. Si cada uno pidió un plato, una bebida y un postre, ¿cuántas maneras hay de repartir el pedido entre los cuatro amigos?

(A) 1142 (B) 1148 (C) 1150 (D) 1152 (E) 1162

Solución:

La respuesta correcta es la D:
Los cuatro platos principales serán llamados R, R, $\tilde{N}$ y C (ravioles, ravioles, ñoquis, canelones). Las bebidas V, A, A, A. Los postres F, L, M, E. Fijamos un orden para los cuatro amigos. Interpretamos una palabra en las letras R, R, $\tilde{N}$ y C como una asignación de platos a los amigos. Por ejemplo: $RCR\tilde{N}$ significa que el primero come ravioles, el segundo canelones, el tercero ravioles y el cuarto ñoquis. Lo mismo hacemos con las bebidas y los postres.
Por la regla del producto, la cantidad de maneras de repartir el pedido entre los cuatro amigos es

$$\begin{array}{c} \text{maneras de repartir} \\ \text{el plato principal} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{maneras de repartir} \\ \text{la bebida} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{maneras de repartir} \\ \text{el postre} \end{array}$$

El primer factor es la cantidad de palabras en las letras R, R, $\tilde{N}$, C, que es $4!/2! = 12$. El segundo factor es la cantidad de palabras en las letras V, A, A, A, que es $4!/3! = 4$. El tercer factor es la cantidad de palabras en las letras F, L, M, E, que es $4! = 24$. La respuesta es entonces $12 \times 4 \times 24 = 1152$.

Ejercicio

El profesor Oak quiere hacer una investigación sobre algunos tipos de Pokémon. Para ello, le pide a Ash que le envíe 13 Pokémon de manera que no haya más de 5 de tipo Planta, no haya más de 5 de tipo Hielo, haya entre 3 y 5 de tipo Fantasma y que los demás sean de tipo Eléctrico. Asumiendo que tiene suficientes Pokémon de todos los tipos, y que cada uno de ellos tiene un solo tipo, ¿De cuántas maneras puede cumplir lo requerido?

(A) $CR_{10}^4 - 2CR_4^4 - CR_7^4 + 2CR_1^4$

(B) $CR_{13}^4 - 2CR_7^4 - CR_{10}^4$

(C) $CR_{10}^4 - 2CR_4^4 - CR_7^4 - 2CR_1^4$

(D) $CR_{13}^4 - 2CR_7^4 - CR_{10}^4 + 2CR_4^4 + CR_1^4$

(E) $CR_{13}^4 - 2CR_7^4 - CR_{10}^4 + 2CR_4^4 - CR_1^4$

Solución:

La respuesta correcta es la A:
Podemos modelar el problema como la cantidad de soluciones a la ecuación $x_P + x_H + x_F + x_E = 13$ con $0 \leqslant x_P, x_H \leqslant 5$, $3 \leqslant x_F \leqslant 5$
Con un simple cambio de variable, el problema es equivalente a $x_P + x_H + y_F + x_E = 10$ con $0 \leqslant x_P, x_H \leqslant 5$, $0 \leqslant y_F \leqslant 2$
Utilizando el principio de inclusión exclusión, deducimos que la respuesta es $CR_{10}^4 - 2CR_4^4 - CR_7^4 + 2CR_1^4$

Ejercicio

Cada vez que la tía Adela se lava la cabeza completa la botella de shampoo con agua. Si la botella es de 200 ml, en cada lavado usa 10 ml de líquido, y tira la botella cuando ésta tiene 10 % de shampoo y 90 % de agua, ¿para cuántos lavados le alcanza la botella? (Datos que pueden ser útiles: $(0{,}95)^{20} = 0{,}358485922$, $(0{,}95)^{40} = 0{,}128512157$, $(0{,}95)^{60} = 0{,}046069799$, $(0{,}95)^{80} = 0{,}016515374$.)

(A) Para 20 o menos.

(B) Para más de 20 y menos de 40.

(C) Para más de 40 y menos de 60.

(D) Para más de 60 y menos de 80.

(E) Para 80 o más.

Solución:

La respuesta correcta es la C:
Cuando es nueva, la botella tiene 200 ml de shampoo. En cada uso, la tía Adela saca 5 % de líquido. Suponiendo que la solución es homogénea, saca 5 %

del shampoo que hay en la botella (y 5 % del agua). Si a_n es la cantidad de shampoo en la botella, medida en mililitros, después de n lavados de cabeza,

$$\begin{aligned} &a_0 = 200 \\ &a_n = a_{n-1} \times 0{,}95 \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_n = 200 \times (0{,}95)^n$. Adela tira la botella cuando tiene, aproximadamente, 20 ml de shampoo, por lo que para saber cuántos lavados rinde una botella tenemos que buscar el n para el cual a_n sea aproximadamente igual a 20.

$$a_n = 20 \Longleftrightarrow 200 \times (0{,}95)^n = 20 \Longleftrightarrow (0{,}95)^n = 1/10.$$

Esto sucede (de la forma más aproximada posible) para algún n mayor que 40 y menor que 60.