Solucion del segundo parcial de Matemática Discreta 1

Viernes 27 de noviembre de 2015.

Desarrollo I (14 puntos)

Sea a_n la cantidad de palabras de largo n que se pueden formar con las letras {A,B,C,D,E}, tales que las cadenas de Aes, Bes y Ces que aparezcan sean de largo par. Por ejemplo, las palabras DEAA, BBAADCC, AADDCCCCAA son válidas pero las palabras AAAD, DAAAB y BBCCC no lo son (considere a partir del término a_1).

(1) Plantee una relación de recurrencia que describa la situación del problema. (5 puntos)
(Solución) Para calcular a_n observamos cuál es la última letra de la cadena. En los casos de D y E, cualquier cadena de largo $n-1$ puede completarse con una de estas letras. O sea sumamos $2 \times a_{n-1}$ casos. Para contar los casos con Aes, Bes, y Ces, al final de la cadena, hay que tener en cuentas cadenas de largo $n-2$ y concatenar con AA o BB o CC, o sea que estamos sumando $3 \times a_{n-2}$ casos. Así:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2},\ n \geq 3.$$

(2) Calcule a_1 y a_2. (2 puntos)
(Solución) Se tiene que $a_1 = 2$ (D y E) y $a_2 = 7$ (AA, BB, CC, DD, DE, ED, EE).

(3) Resuelva la relación de recurrencia. (5 puntos)
(Solución) Como $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2},\ n \geq 3$, obtenemos la ecuación caracterísitca: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Las raíces de esta ecuación son -1 y 3. Luego la solución general de la ecuación de recuerrencia es: $a_n = \alpha(-1)^n + \beta(3)^n$, para $n \geq 1$. Así, utilizando las condiciones iniciales calculadas en el ítem anterior se obtiene: $a_n = \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} \times 3^n$, con $n \geq 1$.

(4) Calcule a_7. (2 puntos)
(Solución) Sustituyendo n por 7 en la solución dada en el ítem anterior se obtiene $a_7 = 1640$.

Desarrollo II (14 puntos)

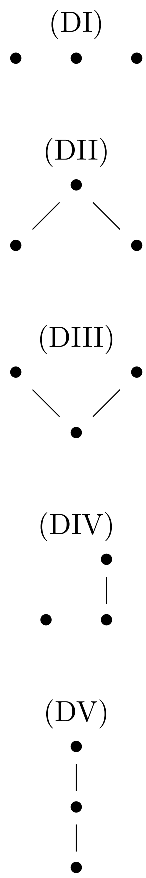
Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

(1) Calcular el número de relaciones de equivalencia que se pueden definir en A. (7 puntos)
(Solución) Según el Ejercicio 2 del Práctico 8, del curso actual (segundo semestre 2015), R_n = número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto con n elementos $= S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$. Por lo tanto $R_5 = S(5,1) + S(5,2) +$

$\cdots + S(5,5) = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$.

(Solución) Otra forma de resolver este problema es contando caso a caso, teniendo en cuenta cuántas clases de equivalencia hay y cuántos elementos tienen las mismas. Así con solo una clase de equivalencia (con 5 elementos) hay un solo caso. Luego con dos clases de equivalencia tenemos dos situaciones posibles: una clase de 1 elemento y la otra de 4 elementos (5 casos), o una clase de 2 y la otra clase de 3 elementos ($C^5_2 = 10$ casos). También es posible tener tres clases de equivalencia, y aquí nuevamente tenemos dos posibles configuraciones 1+1+3 ($C^5_3 = 10$ casos) y 1+2+2 ($\frac{1}{2}(C^5_3 \times C^3_2) = 15$ casos). Queda por contar el caso de cuatro clases de equivalencia, siendo la única configuración posible 1+1+1+2 ($C^5_2 = 10$ casos) y por último el caso de cinco clases de equivalencia, siendo la única configuración posible 1+1+1+1+1 (1 caso). Total $1 + 5 + 10 + 10 + 15 + 10 + 1 = 52$ casos posibles.

(2) Calcular el número de relaciones de orden que se pueden definir en $A \backslash \{a_1, a_2\}$. (7 puntos)
(Solución) Aqui contaremos a partir de los diagramas de Hasse posibles. Son los siguientes:



En el caso DI hay solo una posibilidad. En el caso DII hay tres posibilidades según quién es el elemto máximo del orden. En el caso DIII también hay tres posibilidades según quién es el elemento mínimo. En el caso DIV hay 6=3× 2 posibilidades, según quién no es comparable, y entre los comparables quién es el "mayor". En el caso DV también hay 6=3! posibilidades. En total son 19 relaciones de orden posibles.

Múltiple opción 1: Tenemos 6 computadoras idénticas y 9 cables de conexión. Queremos que cada computadora se conecte con otras 3, usando todos los cables.

(A) Existe más de una forma de conectarlas.

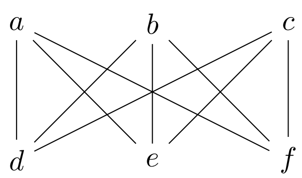
(B) Existe una única manera de conectarlas.

(C) No existe forma de conectar cada una con otras 3 usando los 9 cables.

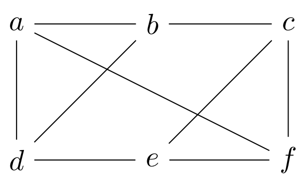
(D) Existe una forma de conectarlos donde el grafo determinado no admite ciclo hamiltoniano.

(E) Existe una forma de conectarlos donde el grafo determinado admite un recorrido euleriano.

Solución:



El grafo de arriba es bipartito, 3-regular, con 6 vértices y 9 aristas.



Este grafo no es bipartito, luego no es isomorfo al primer grafo. Así la respuesta (A) es verdadera, la (B) falsa y la (C) falsa.

Como $gr(v) = 3 > \frac{n-1}{2} = \frac{5}{2}$ para todo vértice v del grafo, entonces todo grafo en esas condiciones admite ciclo hamiltoniano. Luego D es falso.

Recordemos el siguiente teorema,

Teorema: El grafo G admite recorrido Euleriano del vértice v al vértice w si y sólo si G es conexo y los únicos vértices de grado impar son v y w.
Como $\mathrm{gr}(v) = 3$ (impar) para todo vértice v del grafo, se tiene que (E) es falsa.

Múltiple opción 2: Dada una relación cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede asegurar que la relación es:

(A) Reflexiva, no antisimétrica y transitiva.

(B) Simétrica, no transitiva y reflexiva.

(C) Simétrica, antisimétrica, no transitiva.

(D) No transitiva, asimétrica y no antisimétrica.

(E) No transitiva, no simétrica, asimétrica.

(Solución) La relación de orden es, claramente, Reflexiva y Simétrica, pues la diagonal de la matriz tiene todas sus entradas no nulas y la matriz es simétrica. En particular no es asimétrica, y también se puede observar que no es antisimétrica (por ejemplo $(1,3) \in R$ y $(3,1) \in R$). Por último no es transitiva pues si M es la matriz M^2 no es menor o igual M. Así la única solución correcta es la (B) en el listado anterior.

Múltiple opción 3: Sea G un grafo con 10 vértices y 7 aristas. Entonces,

(A) G admite un ciclo hamiltoniano.

(B) Existe un grafo G con las condiciones de arriba, que admite un circuito euleriano y no tiene puntos aislados.

(C) G es conexo, pero no admite ciclo hamiltoniano.

(D) G tiene tres componentes conexas o más.

(E) G es la unión de dos árboles disjuntos.

(Solución)
Afirmación: Un grafo X con 10 vértices, si es conexo tiene 9 aristas o más.
Demostración de la afirmación: Si el grafo $X = (V, E)$ es conexo y tiene nueve aristas (en particular verifica $\sharp V = \sharp E + 1$) entonces es un árbol. Si es conexo y no es árbol, considero $H = (V_H, E_H) \hookrightarrow X = (V, E)$ un subgrafo árbol que sea recubridor. Entonces $10 = \sharp V = \sharp V_H =$

$\sharp E_H + 1 \leq \sharp E + 1$. Entonces $9 = \sharp E_H \leq \sharp E$.

Luego, si G es un grafo con 10 vértices y 7 aristas, no es conexo. Por lo tanto las opciones (A) y (C) son falsas. Más aún, usando las ecuaciones de arriba puede verse que el grafo G tiene 3 componentes conexas o más. Por lo tanto la opción (E) también es falsa y la (D) es verdadera. Por último, si admite un circuito euleriano, las 7 aristas han de estar en la misma componente conexa. Como tiene 3 o más componentes conexas, entonces tiene que tener puntos aislados. Por lo tanto (B) también es falsa. La opción correcta es la (D).

Múltiple opción 4: Considere $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 35, 210\}$, y $\mathfrak{R}$ la relación: a divide a b y $(A, \mathfrak{R})$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces,

(A) $\mathfrak{R}$ es un orden total.

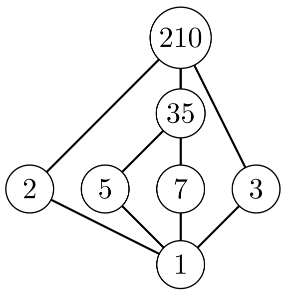
(B) $\mathfrak{R}$ es un retículo y $\sup\{2, 5\} = \sup\{5, 7\}$.

(C) $\mathfrak{R}$ no es un retículo pero tiene mínimo.

(D) $\mathfrak{R}$ es un retículo y admite una anticadena de 4 elementos.

(E) $\mathfrak{R}$ no es un retículo pero 210 es máximo.

(Solución)
El diagrama de Hasse de la relación R es:



Entonces R no es un orden total porque 2 no divide a 3 ni 3 divide a 2. Entonces es falsa la opción (A). Se puede ver que R es un retículo pues todo los conjuntos con dos elementos (o equivalentemente todos los conjuntos finitos) tienen ínfimo y supremo. Luego las opciones (C) y (E) son falsas. Por último $\sup\{2, 5\} = 210$ y $\sup\{5, 7\} = 35$. Así la opción (B) es falsa. La única verdadera es la opción (D), pues $\{2, 3, 5, 7\}$ es una anticadena de 4 elementos.

Último ejercicio: Halle la cantidad de ciclos distintos de longitud 5 que hay en K_5 (el grafo completo de 5 vértices) .
(Solución) Recordemos la definición de ciclo:

Ciclo de largo n: subgrafo isomorfo a C_n ($n \geq 3$).

Si $K_5 = (V, E)$, con $V = \{a, b, c, d, e\}$, entonces un ciclo podemos describirlo con una 5-upla, como por ejemplo, (a, b, c, d, e). Estos nos da $P_5 = 5! = 120$ 5-uplas (todas las permutaciones posibles de 5 elementos). Sin embargo observemos que toda rotación determina el mismo ciclo, o sea, $(a, b, c, d, e) = (b, c, d, e, a) = ... = (e, a, b, c, d)$. Pero también tenemos que $(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a)$ (simetría especular). O sea que el total de ciclos es: $\frac{5!}{2\times 5} = 12$. En todo el argumento hemos usado que al ser K_5 el grafo inicial, siempre tenemos arista entre cada par de vértices.