

Práctico 4
Principio de Inclusión-Exclusión y Principio del Palomar
 Ref. Grimaldi Secciones 5.5, 8.1 y 8.3

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Ejercicio 1

- (a) ¿Cuántos enteros entre 1 y 105 inclusive no son divisibles por ninguno de los enteros 3, 5, 7?
- (b) (Exam. julio 2000 Ej9) ¿Cuántos enteros entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no son divisibles por ninguno de los enteros 5, 7 y 11?

Ejercicio 2 De 100 estudiantes, 32 estudian matemática, 20 física, 45 biología, 15 matemática y biología, 7 matemática y física, 10 física y biología, 30 no estudian ninguna de las tres materias.

1. Encuentre el número de estudiantes que estudian las tres materias.
2. Encuentre el número de estudiantes que estudian exactamente una de las tres materias.

Ejercicio 3 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

si x_i es un entero y

- (a) $0 \leq x_i \leq 8$ para todo i ?
- (b) $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$?

Ejercicio 4 (Exam. diciembre 2009 Ej3) Se tira un dado 6 veces. Calcule la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado.

Ejercicio 5 Calcule cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

- (a) Ningún dígito está en su posición original.
- (b) Los pares no están en su posición original.
- (c) Los pares no están en su posición natural y la secuencia debe empezar con los dígitos 1, 2, 3, 4 en algún orden.

PRINCIPIO DEL PALOMAR

Ejercicio 6 Demuestre que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Ejercicio 7 Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, pruebe que deben haber dos que estén a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

Ejercicio 8 Sea $f : A \rightarrow B$ una función, donde $|A| > |B|$. Demuestre que hay al menos $\lceil |A| / |B| \rceil$ puntos del dominio que toman el mismo valor.

Ejercicio 9 (1er Par. setiembre 2009 Ej3) Se consideran n puntos en un triángulo equilátero de lado 1. ¿Cuál es el n mínimo que garantiza que al menos dos de los puntos se encuentran a distancia menor o igual que $\frac{1}{2}$? (Vale colocar puntos sobre los lados del triángulo).

Ejercicio 10 Demuestre que entre 100.000 personas hay al menos dos que nacieron exactamente al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

Ejercicio 11 Pruebe que al menos uno de m enteros consecutivos es divisible por m .

Ejercicio 12 (Examen Marzo 2003) Halle el menor natural n tal que dados n dígitos diferentes se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados diferirán en un múltiplo de 6.

Ejercicios Complementarios

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Ejercicio 13 ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 14 ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive tienen a 31 como la suma de sus dígitos?

Ejercicio 15 ¿Cuántas palabras de 4 letras pueden formarse usando las letras A,B,C,D,E si debe aparecer al menos una vocal?

PRINCIPIO DEL PALOMAR

Ejercicio 16 Halle el menor entero n tal que todo tablero rectangular cuadriculado de $4 \times n$, con sus cuadrados pintados de dos colores, tenga al menos un rectángulo cuyas cuatro esquinas estén pintadas del mismo color.

Ejercicio 17 (Ej 5 Examen de Julio 2004) Sea un tablero de 141 filas y 8 columnas. Cada cuadrado del tablero se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro cuadraditos pintados de negro. Demuestre que hay al menos tres filas con igual secuencia de colores.