Sistemas Lineales 2

Solución del examen de julio de 2014

Problema 1

1. *a*) la transferencia del sistema P es: $\frac{1}{s+(a-1)}$ de donde se concluye que el sistema es BIBO estable si se cumple que: $0 > a - 1 \Rightarrow 1 > a$ ($a_{SUP} = 1$).

   b) con $a = \frac{a_{SUP}}{2} = \frac{1}{2}$ la matriz A vale: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ de donde se desprende que todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa (-0.5 y -2). Por lo tanto el sistema P SI es internamente estable.

   c) $y(+\infty) = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s}\frac{1}{s+\frac{1}{2}}s = 2$ Entonces: $y(t) \to 2Y(t)$.

   d) $y(t) \to Y(t)|\frac{1}{j5+0{,}5}|\sin(5t + < \frac{1}{j5+0{,}5})$.

2. $-A_{ol}(s) = \frac{k}{s(s+0{,}5)(s+5)(s+50)}$. Los diagramas de bode se presentan en la figura 1.

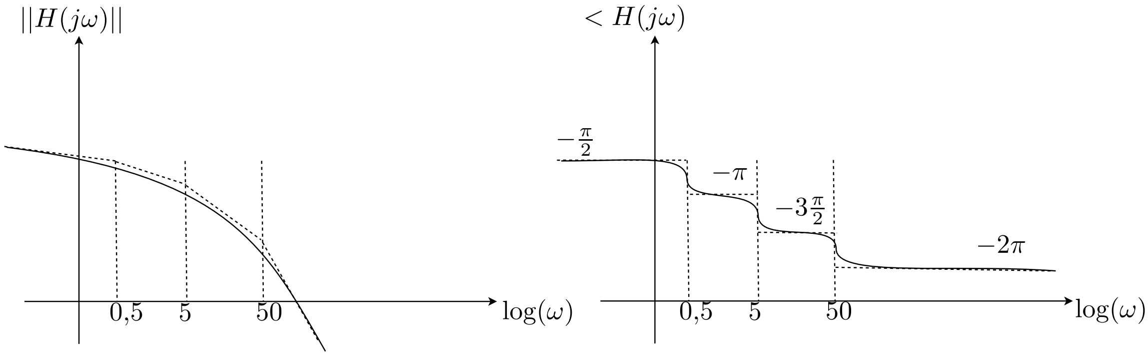

Figura 1:

3. El diagrama de Nyquist del sistema se presenta en la figura 2. El valor de α puede aproximarse

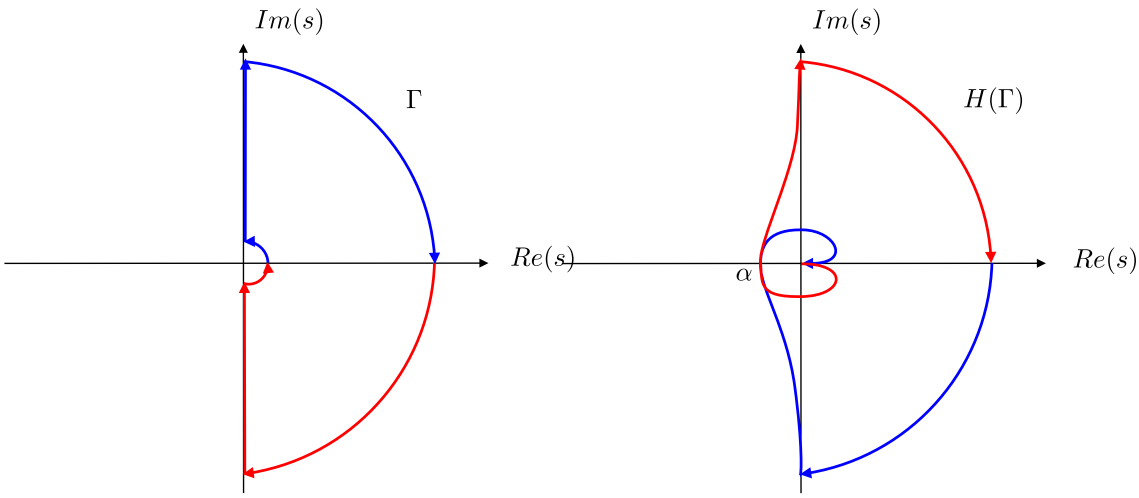

Figura 2:

   abservando el diagrama de bode y la distancia entre los polos: $\alpha \approx \sqrt{5 \times \frac{1}{2}} \approx 1{,}581 rad/seg$. Debido a que la transferencia en lazo abierto no posee polos en el semiplano derecho cerrado, debe entonces cumplirse que: $\frac{1}{k} > \alpha \Rightarrow k < 13{,}75$.

4. $y(+\infty) = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s}\frac{\frac{1}{s+0{,}5}}{1 + \frac{1}{s+0{,}5}\frac{k}{s(s+5)(s+50)}}s = 0.$

Problema 2

a. i) Nombrando los diodos como en la figura 3.

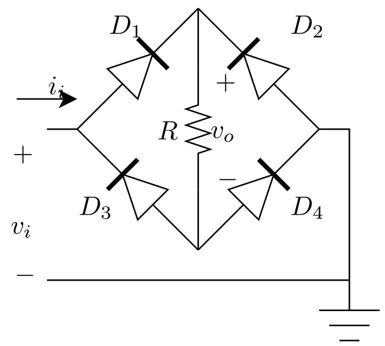

Figura 3: Rectificador

Cuando $v_i > 0$ asumimos D_1 y D_4 ON y D_2 y D_3 OFF.
Verificamos estados de los diodos $i_{D_1} = i_{D_4} = \frac{v_i}{R} > 0$ y $v_{D_2} = v_{D_3} = -v_i < 0$.
Resulta entonces que $v_o = v_i$.
Cuando $v_i < 0$ asumimos D_2 y D_3 ON y D_1 y D_4 OFF.
Verificamos estados de los diodos $i_{D_2} = i_{D_3} = -\frac{v_i}{R} > 0$ y $v_{D_1} = v_{D_4} = v_i < 0$.
Resulta entonces que $v_o = -v_i$.
El circuito de la figura es entonces un rectificador de onda completa $\boxed{v_o(t) = v_i(t)}$.

ii) En todos los casos la corriente es $i_i = \frac{v_i}{R}$ por lo cual la relación entre v_i e i_i es lineal y la impedancia vista por la entrada es R.

b. Podemos resolver el sistema por superposición, primero considerando el dato previo y anulando la fuente y luego al revés.

Si anulamos la fuente el voltaje en la resistencia es nulo por la tierra virtual, por lo tanto la corriente por el condensador será nula y el voltaje es constante e igual a v_{C0}. Como el polo negativo del condensador está conectado a la tierra virtual entonces $v_{o1}(t) = v_C(t) = v_{C0}\ \forall t \geq 0$

Si anulamos la condición inicial el sistema es un amplificador no inversor con entrada constante $V_i(s) = \frac{E}{s}$ y transferencia $H(s) = 1 + \frac{1}{RCs}$. Por lo tanto $V_{o2}(s) = E\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{RCs^2}\right)$. Antitransformando $v_{02}(t) = Y(t)E\left(1 + \frac{t}{RC}\right)$

Sumando ambas contribuciones $\boxed{v_o(t) = Y(t)\left(E\left(1 + \frac{t}{RC}\right) + v_{C0}\right)}$

c.

i) Cómo v_1 ve siempre una resistencia $3R$ hacia el lado del rectificador tenemos un divisor resistivo de coeficiente $3/4$ a la salida de A_1. Entonces $v_1 = \frac{3v_{01}}{4}$.
Como el amplificador A_2 arranca saturado a $+V_{CC}$: $v_2(t) = \frac{v_{o2}(t)}{2} = \frac{V_{CC}}{2}$.
El amplificador A_1 está en una configuración no inversora, por lo tanto mientras la salida no se vaya del rango de alimentación y dado que en el primer intervalo el condensador arranca descargado usando lo hallado en la parte anterior con $v_{c0} = 0$ y $E = \frac{V_{CC}}{2}$ se cumple:

$$v_{o1}(t) = \frac{V_{CC}}{2}\left(1 + \frac{t}{RC}\right)$$

Por lo tanto: $\boxed{v_1(t) = \frac{3V_{CC}}{8}\left(1 + \frac{t}{T}\right)}$.
Mientras $v_1 < v_2$ el amplificador A_2 se mantiene saturado a $+V_{CC}$ y vale la expresión anterior. Esto deja de cumplirse en el instante t_1 que $v_1(t_1) = v_2(t_1)$, haciendo cuentas resulta que $t_1 = T/3$.

También debemos verificar que en todo el intervalo el amplificador A_1 permanece en la zona lineal y efectivamente el valor máximo ocurre en t_1 y vale $\frac{2}{3}V_{CC}$.
La condición inicial de este período en el condensador (v_{C1}) la podemos calcular como la resta $v_{C1} = v_{01}(t_1) - v_2(t_1) = \frac{2}{3}V_{CC} - \frac{V_{CC}}{2} = \frac{V_{CC}}{6}$.
Las cuentas son similares al intervalo anterior sólo que en este caso $v_2 = -\frac{V_{CC}}{2}$ y tenemos que considerar el dato previo. Definamos una nueva variable temporal referida a t_1: $t' = t - t_1$

$$v_{o1}(t') = \frac{-V_{CC}}{2}\left(1 + \frac{t'}{T}\right) + \frac{V_{CC}}{6}$$

$$v_1(t') = \frac{3}{4}v_{o1}(t') = \frac{3}{4}\left(-\frac{V_{CC}}{2}\left(1 + \frac{t'}{T}\right) + \frac{V_{CC}}{6}\right) = -\frac{V_{CC}}{4}\left(1 + \frac{3t'}{2T}\right)$$

Esto se cumple hasta un tiempo $t' = t_2$ en el que $v_1(t_2) = v_2(t_2)$. Haciendo cuentas se llega a $t_2 = 2T/3$.
Haciendo cuentas análogas en el siguiente intervalo $t'' = t' - t_2$:

$$v_1(t'') = \frac{3}{4}v_{o1}(t'') = \frac{3}{4}\left(\frac{V_{CC}}{2}\left(1 + \frac{t''}{T}\right) - \frac{V_{CC}}{6}\right) = \frac{V_{CC}}{4}\left(1 + \frac{3t'}{2T}\right)$$

Lo cual se cumple hasta un tiempo $t'' = t_3$ en el que $v_1(t_3) = v_2(t_3)$. De nuevo haciendo cuentas se llega a que $t_3 = 2T/3$ en este punto $v_C(t_1 + t_2 + t_3) = v_C(t_1)$ y el amplificador A_2 vuelve al mismo estado que estaba en t_1. Por lo tanto llegamos al régimen y el período es $t_2 + t_3 = 4T/3$.
En la figura 4 se muestra la gráfica de v_1 en rojo y de v_2 en azul.

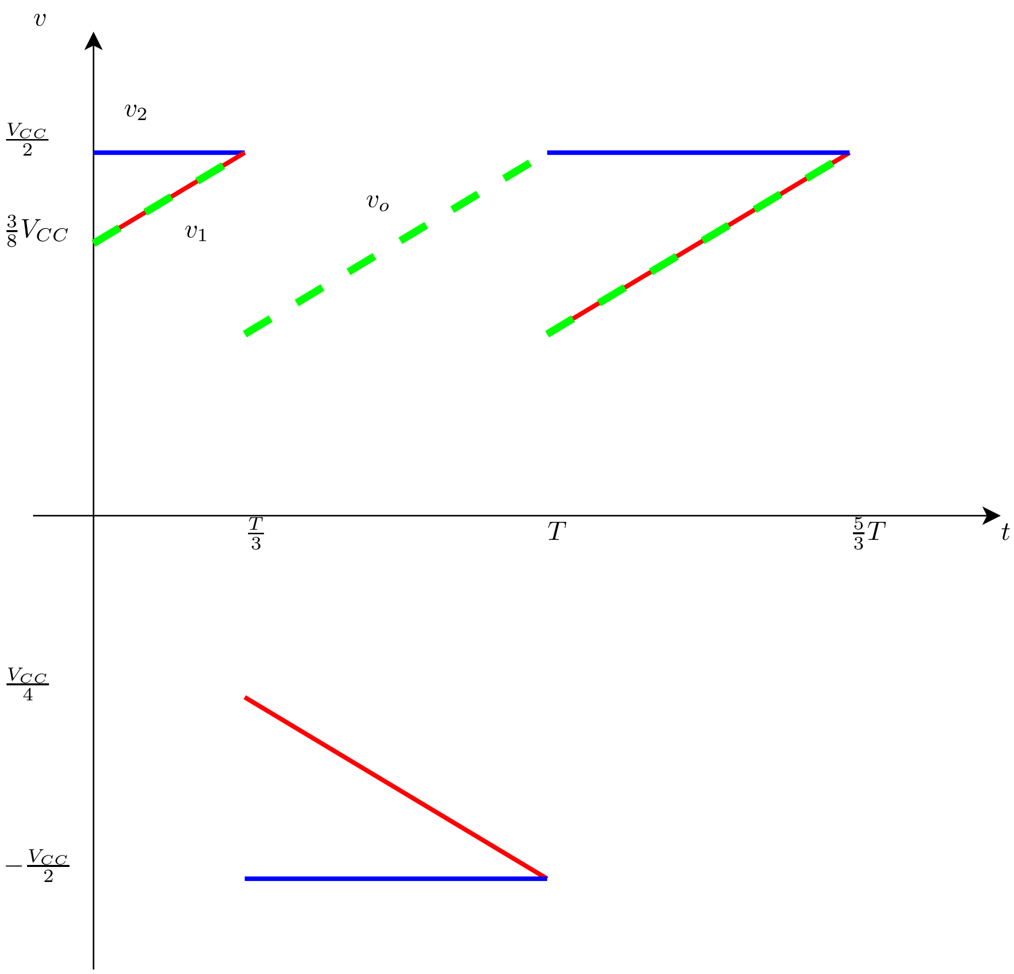

Figura 4:

ii) $v_o(t) = |v_1(t)|$ es un diente de sierra de período $2T/3$ y pendiente $\frac{3V_{CC}}{8T}$ más una constante $\frac{V_{CC}}{4}$. $v_o(t)$ se muestra en la figura 4 en verde punteado.