Introducción a la Teoría de la Información

Ejemplos de ejercicios de la prueba final

Problema 1

Considerar un par de canales gaussianos paralelos de forma que:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}\right),$$

y donde hay una restricción de potencia $E(X_1^2 + X_2^2) \leq 2P$. Asumir que $N_1 > N_2$.

1. Hallar la capacidad de este canal.
2. Mostrar que para P entre 0 y cierto valor P_0 que deberá ser hallado, el canal se comporta como un único canal con potencia de ruido N_2.
3. Para $P > P_0$ hallar la distribución de potencia óptima entre ambos canales.

Problema 2

Una empanadería decide utilizar un sistema de códigos para identificar sus dos posibles gustos de empanada, “carne” o “jamón y queso”. Las de carne tienen un agujero en el repulgue, las de jamón y queso no tienen ninguna marca (Figura 1(a)). Durante el proceso de fritura, existe la posiblidad de que el agujero de la empanada se tape, confundiendo la empanada de carne en cuestión por una de jamón y queso. Esto ocurre con una probabilidad p.

1. Considerando cada gusto de empanada como un símbolo distinto a transmitir, indicar cuál de los canales vistos en el curso modela el proceso descrito y hacer el diagrama correspondiente.

2. Sea $\pi = \Pr(\text{gusto} = \text{carne})$. Dar una expresión para la Información Mutua del proceso en función de π y p.

3. Calcular la capacidad del canal C y la distribución de entrada (valor de π) con que se alcanza para el caso $p = 1/2$ (Puede usarse la Figura 1(b) para obtener un valor aproximado de $h(x)$).

4. El maestro freidor del establecimiento insiste en que tal vez se pueda procesar las empanadas luego de la fritura de alguna manera (sin abrirlas y sin saber de antemano su gusto) para recuperar el código en la fritura y así mejorar la capacidad del canal. Argumentar por qué esto no es posible.

Problema 3

Sea $\{X_i\}_{i\geq 1}$ un proceso estocástico estacionario sin memoria, donde cada variable X_i está definida sobre un alfabeto finito A. Se desea transmitir este proceso a través de un canal sin ruido a un decodificador que tiene acceso a $\{f(X_i)\}_{i\geq 1}$, donde f es una función arbitraria definida sobre A.

a) Mostrar que es posible realizar esta transmisión usando en media L bits por símbolo con L arbitrariamente cercano a $H(X_1|f(X_1))$.

b) Mostrar que no es posible alcanzar $L < H(X_1|f(X_1))$.

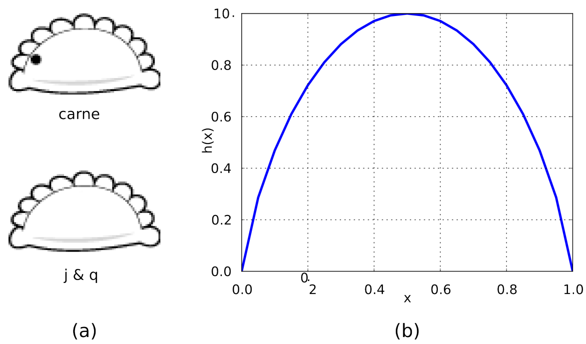

Figura 1: Datos del problema 3. (a) códigos de gustos. (b) función de entropía binaria.

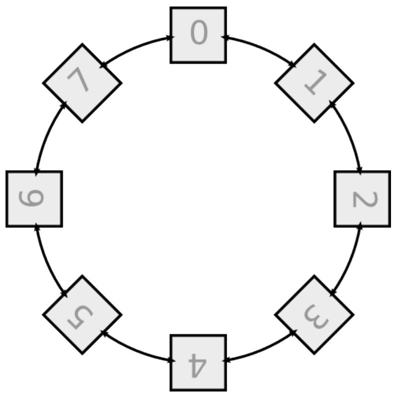

Figura 2: Juego de la memoria con 8 fichas.

Problema 4

Sea un canal con entrada discreta $X \in \{0, 1\}$ con $p(x = 0) = 1 - p$ y $p(x = 1) = p$, y salida continua $Y = X + Z$, con Z i.i.d. distribuida uniformemente en el intervalo $(0, a]$, $a \geq 0$.

a) Hallar la densidad de probabilidad de Y distinguiendo los casos $a \leq 1$ y y $a > 1$.

b) Hallar las entropías diferenciales $h(Y)$ y $h(Y|X)$

c) Hallar la capacidad del canal; discutir según a.

d) Para el caso $a > 1$, hallar el mejor umbral u para decidir si $X = 0$ o $X = 1$ en base al Y observado.

Problema 5

Considere el siguiente juego de memoria entre dos jugadores A y B. Se dispone de M fichas numeradas del 0 al $M - 1$. Las fichas se colocan sobre una mesa en un anillo, ordenadas según su número en sentido horario, de modo que su lado impreso queda boca abajo. La figura 2 muestra esto para el caso $M = 8$. En cada jugada, el jugador A da vuelta una ficha durante un breve instante y toma nota de su valor X. Luego de un cierto lapso, el jugador B da vuelta la ficha que cree haber visto levantar anteriormente y declara su índice como Y. Dado $X = x$, el jugador B acierta ($Y = x$) con probabilidad 1/2, y tiene probabilidad 1/4 de errarle por un lugar a cada lado (los índices son módulo M, como en la figura 2), es decir

$$\begin{aligned} P(Y = x|X = x) &= 1/2 \\ P(Y = x - 1 \bmod M|X = x) &= 1/4 \\ P(Y = x + 1 \bmod M|X = x) &= 1/4. \end{aligned}$$

Considera un modelo de canal basado en el juego anterior, donde X (la ficha levantada por A) es la entrada al canal, e Y (la ficha levantada por B) es su salida.

a) Indique a qué tipo (o familia) de canal visto en el curso corresponde este modelo.

b) Calcule la capacidad C_M de este canal para $M = 8$ y $M = 4$.

Ahora suponga que B tiene memoria, de modo que si A muestra dos veces (o más) seguidas la misma ficha, B recordará perfectamente la ficha mostrada a partir de la primera repetición.

c) En qué se diferencia este nuevo canal del canal anteriormente descrito?

Sin posiblidad de recibir realimentación (A no puede ver lo que levanta B), se diseña un esquema de transmisión sobre este nuevo canal para aprovechar la memoria de B. Ahora, por cada símbolo $W \in \{0, \ldots, M-1\}$ a transmitir, se efectúan *dos* jugadas consecutivas levantando la ficha W, $X_1 = X_2 = W$, y se decodifica $\hat{W} = Y_2$, de modo que siempre se logre decodificación perfecta, $\hat{W} = W$.

d) Calcule la tasa de transmisión en símbolos por uso del canal R para el nuevo canal para $M = 4$ y compárela con la capacidad C_4 calculada para el canal original. Se cumple que $R < C_4$? De no cumplirse, argumente por qué en términos de las hipótesis del teorema de codificación de canal.

Problema 6

La policía técnica estudia un caso de envenenamiento en una fiesta. Hay 129 vasos sospechosos de ser el único que contiene veneno y se quiere determinar cuál es antes de hacer la búsqueda de huellas dactilares. Se quiere hacer la menor cantidad de pruebas posible de mezclas de los contenidos de los vasos. Alguien sugiere comenzar probando un vaso cualquiera.

a) ¿Cuál puede ser la estrategia que inspira esta propuesta?

b) ¿Existe una estrategia mejor? En ese caso compare la cantidad media de pruebas que requiere cada estrategia.