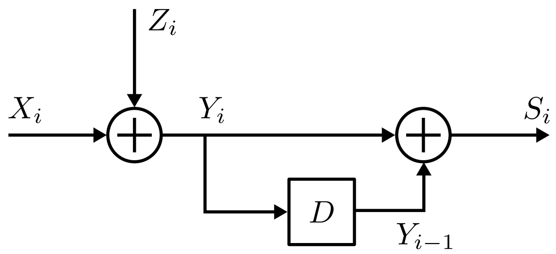
Introducción a la Teoría de la Información
Cuarto parcial

27 de junio de 2022

Problema 1 (5 puntos)

Hallar la capacidad del canal de la figura y discutir según ρ. Asumir que X y Z son independientes, Z_i es iid con distribución gaussiana, $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$, y

- $\mathbb{E}[X_i] = 0$,
- $\mathbb{E}[X_i^2] = P, \forall i$.
- $\mathbb{E}[X_{i-1}X_i] = \rho P$.
- $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$ si $|i-j| \geq 2$, es decir, X_i solo tiene correlación con el X_{i-1} inmediato anterior.



Solución:

Hallamos la varianza de S_i. $S_i = X_i + X_{i-1} + Z_i + Z_{i-1}$

$\mathbb{E}[S_i^2] = \mathbb{E}[X_i^2] + \mathbb{E}[X_{i-1}^2] + \mathbb{E}[X_i X_{i-1}] + \mathbb{E}[Z_i^2] + \mathbb{E}[Z_{i-1}^2]$

Otros términos, del tipo $\mathbb{E}[X_i Z_i]$ o $\mathbb{E}[Z_i Z_{i-1}]$, son nulos por independencia y media nula. $\mathbb{E}[Z_i] = 0$.

$\mathbb{E}[S_i^2] = 2P + \rho P + 2N$

La capacidad es el máximo de la información mutua.

$I(S_i; X_i, X_{i-1}) = H(S) - H(S|X) = H(S) - H((X_i + X_{i-1} + Z_i + Z_{i-1})|X_i, X_{i-1}) = H(S) - H(Z_i + Z_{i-1})$

$Z_i + Z_{i-1}$ es gaussiana, de varianza $2\,\mathbb{E}[Z_i i^2] = 2N$

$H(S)$ es máxima cuando S es gaussiana, con la varianza hallada.

Entonces $C = max I(S; X) = \frac{1}{2} log(1 + \frac{P(1+\rho)}{N})$

Problema 2 (5 puntos)

Sea $X \in \mathbb{R}$ una variable aleatoria con densidad de probabilidad p_X. Se desea cuantificar X con un cuantificador de R bits ($N = 2^R$ valores). Se considera como medida de distorsión la distancia Euclídea. Sean $\{\hat{X}_i\}$ los elementos del codebook del cuantificador y $\{x_i\}$ los límites de las regiones del cuantificador.

1. Dar la expresión para la distorsión asociada a esta cuantificación en función de $\{\hat{X}_i\}$ y $\{x_i\}$.
2. Hallar la expresión de los niveles de cuantificación óptimos $\{\hat{X}_i^*\}$.
3. Hallar la expresión de los límites de las regiones del cuantificador óptimos $\{x_i^*\}$.

Considerar ahora el caso de $N = 2$ y p_X es $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

4. Hallar los valores de $\hat{X}_1^*$ y $\hat{X}_2^*$.
5. Mostrar que en este caso la distorsión es

$$D = \frac{\pi - 2}{\pi}\sigma^2.$$

Solución:

1. $D = \int_{\infty}^{\infty}(x - X_i)^2 p_X \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - X_i)^2 p_X \mathrm{d}x$
2. $\hat{X}_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x p_X(x)\mathrm{d}x}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_X(x)\mathrm{d}x}$
3. $x_i = \frac{1}{2}(\hat{X}_i^* + \hat{X}_{i+1}^*)$
4. $\hat{X}_i^* = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$
5. $D = 2\int_0^{+\infty}\left(x - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2 p_X(x)dx = \left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\sigma^2$

Problema 3 (5 puntos)

Sea Z una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad exponencial de parámetro $\lambda > 0$,

$$f_Z(z) = \begin{cases} A_e e^{-\frac{z}{\lambda}} & \text{para } z \geq 0 \\ 0 & \text{para } z < 0. \end{cases}$$

1. Calcular A_e para que f_Z sea una densidad de probabilidad y hallar la media en ese caso.
2. Calcular la entropía diferencial $h(Z)$.

Sea W una variable aleatoria no negativa con función de densidad de probabilidad f_W de media λ.

3. Mostrar que la función de densidad de probabilidad exponencial maximiza la entropía diferencial para variables no negativas con una media dada demostrando que $h(W) \leq h(Z)$.

> **Sugerencia:** Considerar $D(f_W||f_Z)$ y seguir un razonamiento análogo al usado para probar que la distribución Gaussiana maximiza la entropía diferencial para una varianza dada.

Solución:

1. $A_e = 1/\lambda$.
2. $h(X) = \mathrm{E}_g\left[-\log g(X)\right] = \log \lambda + \frac{\log e}{\lambda}\mathrm{E}_g[X] = \log \lambda + \log e$.
3. $$\begin{aligned} D(f||g) &= -h(f) - \mathrm{E}_f\left[-\log g(X)\right] \\ &= -h(f) - \mathrm{E}_g\left[-\log g(X)\right] \\ &= -h(f) + h(g)\,, \end{aligned}$$

   donde la segunda igualdad surge de que $\mathrm{E}_g[X] = \lambda = \mathrm{E}_f[X]$.
4. La información mutua entra la entrada y la salida del canal satisface

   $$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) \\ &= h(Y) - h(Z) \\ &= h(Y) - \log e - \log \lambda\,. \end{aligned}$$

   Por otra parte, como $Y = X + Z$, tenemos que $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[X] + \lambda \leq \mu + \lambda$. Por lo tanto, usando la parte 2 concluimos que

   $$\begin{aligned} C &= \max_{X\geq 0, \mathrm{E}[X]\leq \mu} I(X;Y) \\ &= \max_{X\geq 0, \mathrm{E}[X]\leq \mu} h(Y) - \log e - \log \lambda \\ &\leq \log e + \log(\mu + \lambda) - \log e - \log \lambda \\ &= \log\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)\,. \end{aligned}$$
