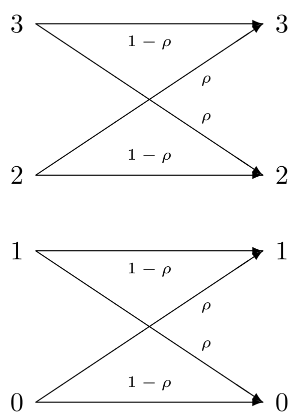
Introducción a la Teoría de la Información
Tercer parcial

30 de mayo de 2022

Problema 1- Canal binario (5 puntos)

Considere el siguiente canal sin memoria, de entrada $X \in \mathcal{X}$, y salida $\mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3\}$ y $0 \leq \rho \leq 1$ es la probabilidad de error.



(a) Escriba su matriz de transición de probabilidades

(b) Indique si el este canal es: i) simétrico, ii) débilmente simétrico, iii) asimétrico

(c) Calcule la capacidad de este canal. Si conoce alguna fórmula, uśela; no es necesario desarrollar, pero debe justificarse de dónde sale la fórmula.

Solución:

a)

$$\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$$

b): Simétrico: tanto columnas como filas son permutaciones de las otras

c): Usando la fórmula para capacidad de canal simétrico se tiene:

$$C = \log|\mathcal{X}| - H(\text{unafila}) = 2 - h(p)$$

Problema 2- Canal aleatorio (5 puntos)

Se considera un canal binario simétrico sin memoria (BSC) de entrada y salida $X, Y \in \{0, 1\}$.

La particularidad de este canal es que, en lugar de tener una probabilidad de transición fija $p = \Pr(Y_i \neq X_i)$, su valor en i, p_i, es la realización de una variable aleatoria P i.i.d. distribuida uniformemente en $[a, b]$.

Como resultado, la capacidad del canal en el tiempo i, $C_i = C(p_i)$ es distinta para cada i.

El objetivo de este ejercicio es calcular el promedio temporal de la capacidad de este canal

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C(p_i)$$

cuando $n \to \infty$. Para esto se pide resolver los siguientes pasos:

(a) Sea $(\pi, 1-\pi)$ la distribución de X. Indique el valor de $\pi(p)$ que alcanza la capacidad $C(p)$ para todo $p \in [a, b]$. No es necesario calcular; alcanza con argumentar.

(b) Indique la capacidad del canal en función de p, $C(p)$ para $p \in [a, b]$; puede usar las fórmulas vistas en el curso.

(c) Exprese $\bar{C} = \mathbb{E}_P[C(P)]$ en función de la entropía binaria $h(p)$. **No es necesario resolver la integral resultante.**

(d) Argumente que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C(p_i) \overset{n\to\infty}{\to} \bar{C}$.

Solución:

a) $\pi(p) = 1/2$ para todo p porque el canal es simétrico

b) $C(p) = 1 - h(p)$, capacidad del canal BSC de parámetro p

c) $\mathbb{E}_P[C(P)] = \int_a^b f(p)C(p)dp = \frac{1}{b-a}\int_a^b (1 - h(p))dp$

Problema 3- Teorema 2 de Shannon (5 puntos)

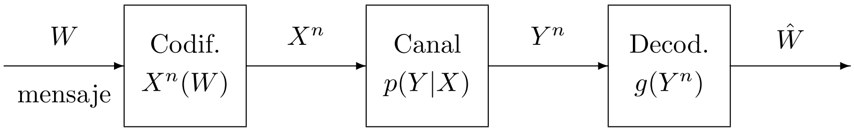


Figura 1: Notación. Se tiene $X_i \in \mathcal{X}$, $Y_i \in \mathcal{Y}$, $i = 1, \ldots, n$. $W \in J = \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$, donde R es la tasa de transmisión.

(a) Para cada uno de los siguientes requerimientos, indique si son o no parte de las hipótesis de la parte directa del segundo teorema de Shannon (capacidad de canal).

- El canal no tiene ruido.
- El alfabeto de entrada $\mathcal{X}$ y el de la salida $\mathcal{Y}$ del canal son del mismo tamaño.
- Los alfabetos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son conjuntos finitos.
- El canal no tiene memoria.
- El diccionario de codewords, $\{X^n(W), W \in J\}$, es generado aleatoriamente.
- La tasa R es menor que la capacidad del canal C.

(b) De acuerdo a las hipótesis del teorema, qué efecto tiene sobre la capacidad del canal el uso de realimentación (feedback)?

Solución:

- Falso. El canal puede o no tener ruido
- Falso. Pueden tener distinto tamaño (ej., canal con borraduras)
- Verdadero. En el teorema, los alfabetos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son conjuntos finitos.
- Verdadero. El canal no tiene memoria. Es la principal hipótesis.
- Verdadero. El teorema supone que el diccionario de codewords, $\{X^n(W), W \in J\}$, es generado aleatoriamente.

- Verdadero. En el directo, que la tasa R sea menor que la capacidad del canal C es una hipótesis, y que el error tiende a cero es la tesis.

b) El feedback no aumenta la capacidad.