Introducción a la Teoría de la Información
Segundo parcial

27 de abril de 2022

Problema 1 (5 puntos)

Sea X una variable aleatoria con cinco posibles resultados $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Considerar dos distribuciones $p(x)$ y $q(x)$ de X como las de la siguiente tabla, donde además las dos últimas columnas representan dos posibles códigos para X:

X	$p(x)$	$q(x)$	$C_1(X)$	$C_2(X)$
x_1	1/2	1/2	0	0
x_2	1/4	1/8	10	100
x_3	1/8	1/8	110	101
x_4	1/16	1/8	1110	110
x_5	1/16	1/8	1111	111

1. Calcular $H(p)$, $H(q)$, $D(p||q)$ y $D(q||p)$.
2. Comprobar que C_1 es óptimo $p(x)$ y que C_2 es óptimo para $q(x)$.

Supongamos ahora que utilizamos el código C_2 cuando la distribución es $p(x)$.

3. ¿Cuál es la longitud media de las palabras de código? ¿En cuánto supera a la entropía de $p(x)$?
4. ¿Cuál es la pérdida si utilizamos el código C_1 cuando la distribución es $q(x)$?

Solución:

1. $H(p) = 1{,}875$ bits, $H(q) = 2$ bits, $D(p||q) = 0{,}125$ bits y $D(q||p) = 0{,}125$ bits.
2. $L_p(C_1) = 1{,}875$ bits $= H(p)$. $L_q(C_2) = 2$ bits $= H(q)$.

3. $L_p(C_2) = 2$ bits $= D(p||q)$.
4. Excede la $H(p)$ en $D(q||p) = 0{,}125$ bits.

Problema 2 (5 puntos)

Las empresas con valores $\mathbf{W} = (W_1, W_2, \cdots, W_m)$ se fusionan de la siguiente manera. Se fusionan las dos empresas de menor valor, formando así una lista de $m-1$ empresas. El valor de la fusión es la suma de los valores de las dos empresas fusionadas. Esto continúa hasta que queda una única, con valor V. Sea $W = \sum_i W_i$ y $\hat{W}_i = W_i/W$.

Por ejemplo, si $\mathbf{W} = (3,3,2,2)$, las fusiones producen $(3,3,2,2) \to (4,3,3) \to (6,4) \to (10)$ y $V = 4+6+10 = 20$.

1. Argumentar que V es el volumen mínimo alcanzable mediante secuencias de fusiones por pares que terminan en una única compañía.
2. Demostrar que el volumen mínimo de fusión V satisface

$$WH(\hat{\mathbf{W}}) \leq V < WH(\hat{\mathbf{W}}) + W.$$

Solución:

1. El volumen total de las fusiones es igual a la suma del valor de cada empresa por el número de veces que participa en una fusión. Esto es idéntico a la longitud media de un código Huffman, con un árbol que corresponde a las fusiones. Como la codificación Huffman minimiza la longitud media, este esquema de fusiones minimiza el volumen total de fusiones.
2. En el caso de la codificación Huffman, tenemos

$$H \leq EL < H + 1.$$

En este caso para el esquema de fusión correspondiente queda

$$WH(\hat{\mathbf{W}}) \leq V < WH(\hat{\mathbf{W}}) + W.$$

Problema 3 (5 puntos)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme sobre $\mathcal{X} = \{0, 1\}$.

1. Para $\epsilon > 0$ arbitrario, mostrar que todas las secuencias binarias de largo n pertenecen al conjunto de secuencias típicas, $A_\epsilon^{(n)}$.

2. Calcular $I(X_i; X_j)$ distinguiendo los casos $i = j$, $i \neq j$.

Solución:

1. Para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ arbitraria tenemos $-\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{1}{n} \log 2^{-n} = 1 = H(X)$, por lo cual se cumple $\left| -\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) - H(X) \right| < \epsilon$ para todo ϵ positivo.

2. $I(X_i; X_j) = H(X_i) - H(X_i|X_j) = 1 - H(X_i|X_j)$. Para $i \neq j$, por la independencia entre las variables tenemos $H(X_i|X_j) = H(X_i) = 1$ por lo cual $I(X_i; X_j) = 0$. Para $i = j$, tenemos $H(X_i|X_j) = 0$ por lo cual $I(X_i; X_j) = 1$.
