Introducción a la Teoría de la Información
Primer parcial

marzo de 2022

Problema 1 (5 puntos)

Sean X, Y variables aleatorias sobre alfabetos finitos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, respectivamente. Mostrar que si $H(Y|X) = 0$ entonces Y es función de X, en el sentido de que para todo $x \in \mathcal{X}$ con $p(x) > 0$ existe un único $y \in \mathcal{Y}$ tal que $p(x, y) > 0$.
Sugerencia: Recordar que $H(Y|X) = \sum_{x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{Y}} p(x)H(Y|X = x)$.

Solución:

Como todos los términos en $\sum_{x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{Y}} p(x)H(Y|X = x)$ son no negativos, el hecho de que $H(Y|X) = 0$ implica que todos los términos son nulos. Por lo tanto, para x arbitrario tal que $p(x) > 0$, necesariamente se cumple $H(Y|X = x) = 0$. Esto implica que existe un único valor $y \in \mathcal{Y}$ con probabilidad condicional $p(y|x)$ positiva (y por lo tanto igual a 1). Para dicho y, tenemos $p(x, y) = p(x)p(y|x) > 0$, y para los demás valores $y' \in \mathcal{Y} \setminus \{y\}$ tenemos $p(x, y') = p(x)p(y'|x) = 0$.

Problema 2 (5 puntos)

Sean X, Y variables aleatorias sobre un mismo alfabeto finito $\mathcal{X}$. Definimos E como una variable aleatoria binaria que indica si $X \neq Y$,

$$E = \begin{cases} 0\,, & \text{si } X = Y\,, \\ 1\,, & \text{si } X \neq Y\,. \end{cases}$$

Por ejemplo si X, Y representan la entrada y salida de un canal, respectivamente, E se puede interpretar como una indicación de si hay error en la comunicación. Definimos $p = P(E = 1)$.

1. Demostrar que $H(X|Y, E) = p \sum_{y\in\mathcal{X}} P(Y = y|E = 1)H(X|Y = y, E = 1)$.
2. Demostrar que $H(X|Y) \leq H(p) + p \log |\mathcal{X}|$.

   Sugerencia: Empezar por justificar la igualdad

$$H(X|Y) + H(E|X, Y) = H(E|Y) + H(X|E, Y)\,,$$

y observar que uno de los términos vale cero.

Solución:

1.
2. Por la regla de la cadena tenemos

$$H(X|Y) + H(E|X,Y) = H(E,X|Y) = H(E|Y) + H(X|E,Y)$$

y, como E es función de X, Y, también tenemos $H(E|X,Y) = 0$, de modo que se cumple

$$H(X|Y) = H(E|Y) + H(X|E,Y)\,. \qquad (1)$$

Como condicionar no aumenta la entropía, tenemos $H(E|Y) \leq H(E) = H(p)$ y, como $H(X|Y = y, E = 1) \leq \log|\mathcal{X}|$ para todo $y \in \mathcal{X}$, la parte anterior implica que $H(X|Y,E) \leq p \log|\mathcal{X}|$. Por lo tanto, a partir de (1) obtenemos $H(X|Y) \leq H(p) + p \log|\mathcal{X}|$.

Problema 3 (5 puntos)

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ un proceso de Markov con conjunto de estados $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$, donde X_1 tiene distribución uniforme en $\mathcal{X}$ y la matriz de probabilidades de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Considerar el proceso $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ definido por

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 & (2) \\ Z_i &= X_i - X_{i-1}\,(\mathrm{mod}\ 3),\ i > 1\,. & (3) \end{aligned}$$

1. El proceso $\{X_n\}_{n\geq 1}$, ¿es estacionario? Justificar.
2. Calcular una tasa de entropía de $\{Z_n\}_{n\geq 1}$.

Solución:

1. El proceso es estacionario porque $(1/3, 1/3, 1/3)P = (1/3, 1/3, 1/3)$.

2. Como $Z_1 \dots Z_n$ es una función biyectiva de $X_1 \dots X_n$, tenemos $H(Z_1 \dots Z_n) = H(X_1 \dots X_n)$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(Z_1 \dots Z_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{H(X_1 \dots X_n)}{n} = H(X_2|X_1) = 3/2 \text{ bits}\,.$$

Problema 4 (5 puntos) Sea $\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots$ un proceso estocástico estacionario.

1. Mostrar que $H(X_{-n}|X_0) = H(X_n|X_0)$ para todo entero n.
2. Mostrar que $H(X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_{n+1})$, $n > 1$, es una sucesión no creciente.

Solución:

1.

$$\begin{aligned} H(X_{-n}|X_0) &= H(X_{-n}, X_0) - H(X_0) \\ &= H(X_0, X_n) - H(X_0) \\ &= H(X_n|X_0)\,, \end{aligned}$$

donde usamos la regla de la cadena para la primera y última igualdad, y en la segunda usamos que $H(X_{-n}, X_0) = H(X_0, X_n)$ porque el proceso es estacionario.

2.

$$\begin{aligned} H(X_{n+1}|X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+2}) &\leq H(X_{n+1}|X_2, \dots, X_n, X_{n+2}) \\ &= H(X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_{n+1})\,, \end{aligned}$$

donde la desigualdad surge de que condicionar no aumenta la entropía y la igualdad es consecuencia de que el proceso es estacionario.
