

# Introducción a la Teoría de la Información

Prueba final

19 de julio de 2021

## Problema 1 (10 puntos)

Alicia tira dos dados (no cargados) y anota la suma de los números que quedan en la cara superior. Bob tiene que hallar este número, pero solamente puede hacer preguntas cuya respuesta sea binaria (sí/no).

Detallar completamente, dando un diagrama de flujos, una estrategia de preguntas con respuesta binaria (sí/no) que requiera la menor cantidad de respuestas en promedio. Justificar.

## Problema 2 (15 puntos)

Un canal transmite una variable discreta binaria,  $X = V$  o  $X = -V$  con probabilidades  $1 - p$  y  $p$  respectivamente. El canal tiene ruido  $Z$  de distribución uniforme en  $(-a, a)$ . Se recibe  $Y = X + Z$ .

(a) Expresar o dibujar la densidad de probabilidad de  $Y$  distinguiendo los casos: (1)  $a < V$  y (2)  $V < a < 2V$ .

(b) Hallar la entropía discreta o continua, según corresponda, de  $X$ ,  $Z$  e  $Y$ , en los dos casos citados. Hallar la entropía condicional  $H(Y|X)$ . Comentar el resultado  $H(Y)$  en el caso 1.

(c) Hallar la capacidad del canal en los dos casos. Comentar cómo varía con  $a$ .

(d) Se decide si se recibió  $V$  o  $-V$  comparando  $Y$  con un umbral  $U$ . ¿Cuál es el mejor valor de  $U$  para minimizar la probabilidad de error en cada uno de los casos 1 y 2?

### Problema 3- El cervecero distraído (15 puntos)

El pub irlandés “Hamming’s” tiene una carta de  $n$  cervezas distintas; cada cerveza es identificada por un número del 1 al  $n$ .

El establecimiento es atendido por Johnny, un muchacho muy amable pero bastante olvidadizo: cada vez que un cliente pide una cerveza  $x$ , hay una probabilidad  $\theta$  de que la cerveza  $y$  que Johnny le sirve sea cualquier una menos la que el cliente pidió.

La memoria de Johnny es tan mala que el error que comete es totalmente independiente de cualquier error que haya cometido antes.

(a) Modelar el escenario anterior como un sistema de transmisión. Dibujar el diagrama del canal y expresar la matriz de transición del mismo para  $n = 4$ .

(b) Indicar qué canal o familia de canales discretos y sin memoria describe al sistema anterior de la manera más precisa.

(c) Escribir la capacidad de dicho canal en función de  $n$  y de  $\theta$ . (Si conoce la expresión, no es necesario derivarla.)

(d) Calcular el valor de  $\theta$  para el cual  $C = 0$ .