Introducción a la Teoría de la Información

Segundo parcial

30 de junio de 2021

Problema 1 (5 puntos)

Sea $X \in I\!R$ con media nula y varianza σ^2. Mostrar que la entropía diferencial $h(X)$ cumple

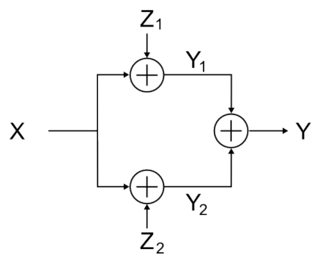
$$h(X) \leq \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

y que la igualdad se da sii X tiene distribución normal.

Nota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Problema 2 (5 puntos)

Considerar un canal con ruido gaussiano (como el de la figura) y con una restricción de potencia P, donde la señal toma dos caminos diferentes, y ambas señales ruidosas Y_i son sumadas en la antena



1. Hallar la capacidad de este canal si Z_1 y Z_2 tienen distribución conjunta normal con matriz de covarianza
$$K_Z = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$
2. Discutir el resultado para valores relevantes de ρ.

Problema 3 (5 puntos)

Sea $X \in I\!R^n$ una variable aleatoria n-dimensional que se desea cuantificar con un cuantificador de N niveles (R bits, $N = 2^R$).
En el caso de $n = 1$, $R = 1$ y $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ es posible hallar una expresión cerrada para los niveles ($\hat{X}_j$) y límites de las regiones (x_j) del cuantificador óptimo.

1. Hallar los niveles de cuantificación óptimos $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2\}$ en este caso.

Con $n > 1$, $R > 1$ y X genérica no es posible hallar una expresión cerrada. En este caso:

2. Dar la condiciones de optimalidad necesarias que debe cumplir un cuantificador vectorial óptimo.
3. Explicar cómo se utilizan en el Algoritmo de Lloyd Generalizado.