Introducción a la Teoría de la Información

Segundo parcial

28 de abril de 2021

Problema 1 (5 puntos)

Se sabe que en un crucero con 129 personas hay una con una cierta enfermedad, y todas son igualmente probables de serlo. Para identificar la persona se cuenta con un test que devuelve una respuesta positiva o negativa en minutos a partir de una muestra biológica. Además, es posible mezclar las muestras biológicas sin perder sensibilidad del test. Se desea minimizar la esperanza de la cantidad de tests.

1. El encargado de la seguridad sanitaria propone hacer tests secuancialmente a cada persona hasta encontrar a la persona positiva. ¿Cuál es el número medio de tests en este caso?

2. Un integrante del crucero que hizo el curso de Introducción a la Teoría de la Información sugiere que hay una estrategia óptima de forma de identificar a la persona con el menor número de test posible. ¿Cuál es esa estrategia y cuál es el número medio de tests que se deben realizar en este caso?

Problema 2 (3 puntos)

Argumentar que para todo ϵ positivo existe una variable aleatoria X cuyo largo de código medio óptimo es mayor que $H(X) + 1 - \epsilon$.

Problema 3 (4 puntos)

Sean $\{(X_i, Y_i)\}_{i>0}$ una sucesión de pares de variables aleatorias, cada una distribuida según $p(x, y)$. Los pares (X_i, Y_i), (X_j, Y_j) son independientes entre sí para $i \neq j$, aunque X_i no es necesariamente independiente de Y_i. Calcular el límite en probabilidad de

$$\frac{1}{n} \log \frac{p(X^n)}{p(X^n, Y^n)} \,. \tag{1}$$

Problema 4 (3 puntos)

Sean X, Y variables aleatorias independientes, definidas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$, con distribución $(p, 1 - p)$, $0 < p < 1$.

1. ¿Cuánto vale $I(X; Y)$? Justificar citando un resultado visto en el teórico.

2. Defina Z de modo que $I(X; Y|Z) > 0$. Justificar, por ejemplo con un argumento como el desarrollado en clase teórica.