Introducción a la Teoría de la Información
Primer parcial

marzo de 2021

Problema 1 (5 puntos)

Sea $X \in \mathcal{X}$, $X \sim p$, una variable aleatoria, donde $\mathcal{X}$ es el conjunto de naturales entre 0 y $2n-1$, inclusive, para cierta constante positiva n. Sean

$$Q = X \,\mathbf{div}\, 2\,, \quad R = X \,\mathbf{mod}\, 2$$

el cociente entero y el resto de dividir X por 2. Establecer desigualdades y especificar qué condiciones debe cumplir p para que se de la igualdad en los siguientes casos:

- $H(X)$ vs. $H(Q, R)$
- $H(X)$ vs. $H(Q)$
- $H(R)$ vs. 1

Justificar todas las respuestas, para lo cual pueden usarse resultados estudiados durante el curso (teórico y práctico) sin necesidad de demostrarlos.

Solución:

- (Q, R) es función biyectiva de X, por lo cual $H(X) = H(Q, R)$, para todo p.
- Tenemos $H(X) = H(Q, R) = H(Q) + H(R|Q) \geq H(Q)$. La igualdad se da si y solo si $H(R|Q) = 0$, es decir si y solo si para todo q, $0 \leq q < n$, se cumple que o bien $p(2q) = 0$ o $p(2q+1) = 0$ (o ambos).
- R toma valores en $\{0, 1\}$, por lo cual $H(R) \leq \log |\{0, 1\}| = 1$. La igualdad se da si y solo si R tiene distribución uniforme, es decir, $\sum_{q=0}^{n-1} p(2q) = \frac{1}{2}$.

Problema 2 (5 puntos)

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ un proceso de Markov con conjunto de estados $\{0, 1\}$, donde X_1 tiene distribución uniforme en $\{0, 1\}$ y la matriz de probabilidades de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular $H(X_n)$ para $n > 1$.
2. Calcular una tasa de entropía del proceso.

Justificar todas las respuestas, para lo cual pueden usarse resultados estudiados durante el curso (teórico y práctico) sin necesidad de demostrarlos.

Solución:

1. El proceso es estacionario porque $(1/2, 1/2)P = (1/2, 1/2)$. Por lo tanto $H(X_n) = H(X_1) = 1$ bit.
2. Para un proceso de Markov estacionario tenemos $\mathcal{H} = H(X_2|X_1)$, que en esca caso vale $\mathcal{H} = \frac{1}{2}H(1/4, 3/4) + \frac{1}{2}H(3/4, 1/4) = 2 - \frac{3\log 3}{4}$.

Problema 3 (5 puntos) Sea $X \in \mathcal{X}$, $X \sim p$, una variable aleatoria, donde $\mathcal{X}$ es un conjunto finito. Complete la siguiente demostración de una cota superior para $H(X)$ y condiciones de igualdad.

1. Sea q ...
2. $D(p||q) = \log|\mathcal{X}| - H(X)$
3. Entonces $H(X) \leq \ldots$, con igualdad si y solo si ....

Solución:

Ver teorema 2.6.4 en Cover.
