Introducción a la Teoría de la Información

Cuarto Parcial

18 de junio de 2018

Problema 1 (5 puntos)

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $p_X()$y medida de distorsión $d(x, y) = (x-y)^2$. Se desea obtener un codebook con 2^R codevectors $\mathcal{C} = (\hat{X}_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_{2^R})$.

1. Si $X \in \mathbb{R}$ mostrar que los codevectors óptimos son de la forma

$$\hat{X}_i^* = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x p_X(x) dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_X(x) dx}$$

donde los x_j son los límites de las regiones asociadas al codebook y éstas son óptimas cuando

$$x_i^* = \frac{1}{2}\left(\hat{X}_i + \hat{X}_{i-1}\right).$$

2. En el caso general que $X \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ dar las condiciones que debe cumplir un algoritmo para obtener el codebook óptimo.

Recordar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x, \theta)\, \mathrm{d}x\right) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \partial_\theta f(x, \theta)\, \mathrm{d}x + f(b(\theta), \theta) b'(\theta) - f(a(\theta), \theta) a'(\theta)$$

Problema 2 (5 puntos)

Sea $X \in \mathbb{R}$ con media nula y varianza σ^2. Mostrar que la entropía diferencial $h(X)$ cumple

$$h(X) \leq \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

y que la igualdad se da sii X tiene distribución normal $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Problema 3 (5 puntos)

Considerar un canal para la transmisión de símbolos binarios equiprobables $X \in \{0, 1\}$ con una restricción de potencia P y con ruido gaussiano aditivo de potencia N. Se transmite $X_i = \sqrt{P}$ o $X_i = -\sqrt{P}$. La detección se realiza comparando el valor recibido Y con un umbral de valor 0; es decir, si $Y > 0$ se detecta $\tilde{X} = 1$ y $\tilde{X} = 0$ si $Y < 0$.

1. ¿Cuál es el modelo de canal discreto que corresponde al problema?

2. Calcular la probabilidad de error en la detección.
3. Comentar los casos extremos en función de la relación señal a ruido P/N muy alta o muy baja.

Ahora el canal se divide a la mitad en dos tramos; por lo tanto la transmisión se puede considerar como la concatenación de dos canales en dos tramos iguales con la misma restricción de potencia P en cada uno. El valor detectado en el primer canal es retransmitido por segundo canal. Asumiremos que en cada canal el ruido tiene potencia $N/2$. La detección se realiza de la misma forma comparando con el umbral de valor 0 a la salida de ambos canales.

4. Hallar la nueva probabilidad de error y comparar.
5. (Bonus) Por ejemplo, hallar o expresar condiciones sobre $\frac{P}{N}$ para conseguir una probabilidad de error de 10^{-4} en uno y otro caso.

Recordar: Para una variable gaussiana $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\Pr(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$ donde $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}\mathrm{d}s$

Solución problema 1

1. La distorisión dado un *codebook* se calcula como

$$D = \int_{\mathcal{R}} d\left(x, Q(x)\right) p_X(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{2^R} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \hat{X}_i)^2 p_X(x)\mathrm{d}x$$

Usando la regla de integración de Leibniz se buscan los óptimos de la distorisión D

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x,\theta)\,\mathrm{d}x\right) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \partial_\theta f(x,\theta)\,\mathrm{d}x + f(b(\theta),\theta)b'(\theta) - f(a(\theta),\theta)a'(\theta)$$

Límites óptimos (x_i):

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} D &= \partial_{x_i}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - \hat{X}_{i-1})^2 p_X(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \hat{X}_i)^2 p_X(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= (x_i - \hat{X}_{i-1})^2 p_X(x_i) - (x_i - \hat{X}_i)^2 p_X(x_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Despejando

$$x_i^* = \frac{\hat{X}_i + \hat{X}_{i-1}}{2}$$

Centroides óptimos ($\hat{X}_i$):

$$\begin{aligned}
\partial_{\hat{X}_i} D &= \partial_{x_i}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \hat{X}_i)^2 p_X(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= -2\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \hat{X}_i) p_X(x)\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Despejando

$$\hat{X}_i^* = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x p_X(x)\mathrm{d}x}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_X(x)\mathrm{d}x}$$

2. En el caso n-dimensional las condiciones que debe cumplir son dos: (i) condición de centroide y (ii) condición de vecino más cercano; además se debe garantizar que los bordes de la regiones deben tener medida nula según $p_X(x)$. Con estas condiciones se plantea un algoritmo iterativo (algoritmo de Lloyd Generalizado). Ver teórico.

Solución problema 2

ϕ gaussiana de igual media (en este caso nula) y varianza que X. Llamemos $g(x)$ a la densidad de la X. La divergencia o distancia K-L cumple $D(g||\phi) \geq 0$.

$$D(g||\phi) = \int g \log \frac{g}{\phi} = -h(g) - E_g(log\phi) = -h(g) - E_\phi(\log \phi) \geq 0$$

Entonces $h(X) \leq \frac{1}{2}\log(2\pi e \sigma^2)$.
Notar que $E_g(\log \phi)$ tiene términos $E_g(X_i X_j)$ que son iguales a $E_\phi(X_i X_j)$ porque así fue calculada ϕ.

Solución problema 3

La señal recibida es $Y_i = \pm\sqrt{P} + Z_i$. La probabilidad de error vale

$$P_e = \frac{1}{2} Pr\left(Y \leq 0 | X = \sqrt{P}\right) + \frac{1}{2} Pr\left(Y \geq 0 | X = -\sqrt{P}\right).$$

El equivalente es un canal binario simétrico con $P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{P}{N}}\right)$.

Si $\frac{P}{N}$ es grande, $\Phi\left(\sqrt{\frac{P}{N}}\right) \to 1$ y $P_e \to 0$: el canal tiene transmisión perfecta, no confunde símbolos. Si $\frac{P}{N}$ es cercano a 0, $\Phi\left(\sqrt{\frac{P}{N}}\right) \to \frac{1}{2}$ y $P_e \to \frac{1}{2}$: la información mutua es nula.

Si se concatenan dos canales, cada uno tiene error $P_e' = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2P}{N}}\right)$. Se puede asumir que los errores en cada canal son independientes. La probabilidad de error total queda

$$P_e = 1 - (1 - P_e')(1 - P_e') \approx 2P_e'.$$

Por ejemplo (sin dividir el canal) para $P_e = 10^{-4}$, entonces $\sqrt{\frac{P}{N}} \approx 3{,}62$ y $P \geq 13N$.
Con dos tramos, $P_e' = 0{,}5 * 10^{-4}$ $\sqrt{\frac{2P}{N}} \approx 3{,}75$ $P \geq 7N$.